Digitized by the Internet Archive
in 2011 with funding from
Research Library, The Getty Research Institute

http://www.archive.org/details/voltimetriaretta00lamb

VOLTIMETRIA

RETTA

OVVERO

MISURA DELLE VOLTE

DI

VINCENZO LAMBERTI

INGEGNERE NAPOLITANO

DEDICATA

A S. E. IL MARCHESE SIGNOR

D. ANGELO

CAVALCANTI

SPETTABILE LUOGOTENENTE DELLA REGIA CAMERA DELLA SUMMARIA.

PRESSO DONATO CAMPO.

CON LICENZA DE' SUPERIORI

VOLTIMETRIA

PARTE I.

DI CUI

MISURA DELLE VOCI

DI

VINCENZO LAMBERTI

PROFESSORE NELL'ACCADEMIA

DI BELLE ARTI

IN

FIRENZE

PRESSO GIUSEPPE MOLINI

1824

ECCELLENZA.

LA presente mia Operetta, che ho l' onore di presentare a V. E., quantunque io spero, che per aver ridotti in facil modo alla pratica, e al frequente, e necessario uso di misurar le Vol-

te gli astrusi, e a pochi noti teoremi di Geometria, non dovesse essere del tutto inutile alla Repubblica delle lettere; pur credo certo, che per la debil maniera, ond' è trattata, e per la poca riputazione del suo Autore, abbisogni di essere ricomandata uscendo in luce a tal Personaggio, che possa bene coll' autorità del suo nome accreditarla nel Pubblico. Or a chi meglio per quest' oggetto posso io rivolgermi, e chi implorare con più fiducia che V. E., il cui sapere, la prudenza, la fermezza di animo, la santità del costume, l' efficace, ed indefessa applicazione pel comun bene, e per l' interesse del Principe, l' hanno degnamente collocata in quel supremo grado di Magistrato, in cui siede, e piucchè in esso ancora in quell' alta stima, ed universale ammirazione ove si vede salita?

lascio

lascio stare l' antica nobiltà del sangue, e i parentati illustri, che la rendono anche più ragguardevole : poichè nò sono questi i pregi , ai quali ella deve la sua grandezza , e noi l' ottimo Magistrato , e 'l Principe il vigilante , e fedel Ministro. Lascio pure tante altre Cariche da lei sostenute con grandissima lode , e per le quali il suo nome sarà sempre caro , e riverito da ognuno ; perchè offenderei la sua modestia, e con essa ne soffrirebbe il Pubblico commodo , intrattenendola inutilmente. E sol mi riduco al primo mio presupposito d' implorare per me , e pel mio libro quella sua forte e naturale inclinazione , che per natura e per elezion la porta a difendere, e promuover sempre qualunque cosa conosca poter essere di comune utilità , e chi veggia mai rivolto per questa strada tanto uniforme ai suoi nobili sentimen-

ti. Iddio conservi, ed innalzi sempre V. E. a maggior gloria, e grandezza

Di V. E.

Umiliss. ed Ossequiosiss. servo vero
Vincenzo Lamberti

Del Rever. D. Carlo Jervolino.

SONETTO.

MAi non saran nel cieco obblio sepolte
Nè d' alcun vento mai saranno sparte
Queste in cui tu descrivi , egregie carte
Architetto gentil , tutte le VOLTE

Da chi , come da te furon disciolte
Le più intrigate Tesi a render l' arte
Facile , e chiara insiem in ogni parte ?
Chi le sue leggi ha , come tu , raccolte?

In ciò col tuo valor tanto t' innalzi
Che 'l Dedaleo valor ben ci somiglia ,
Se non anche più in là varchi , e trabalzi.

Quinc' invidia non mai , non mai sua figlia
La torva gelosia fia , che t' incalzi ;
Ma dietro ti verrà sol meraviglia.

Del Dottor Colombano Cappelli.

SONETTO

NOn nasce l'Uom per se, per gl'altri nasce
Nasce alla Patria, all'Universo intero.
E la Spada, il Saper, l'Opre, il Pensiero
Tutto a lor prò, benchè recasse ambasce.

Foll' è però, chi sommo genio pasce
Di farsi un nome, e glorioso, e altero;
E di Virtù scorrendo aspro sentiero
A grande Onor senza giovar rinasce.

Se questo è ver; quale si debba intanto,
LAMBERTI, all'oprar tuo lode condegna;
Giacchè giovare il Mond' oggi è tuo Vanto?

Ti basta solo udir, ch'ogn' un s' impegna,
A dir, che il LIBRO è necessario tanto,
Ch'altri non disse già, quel ch'c'ne insegna.

INDICE
DE' CAPITOLI.

CAP. I. *Delle varie specie delle Volte a botte, e della solidità di esse.* pag. 9.
DAP. II. *Della superficie concava delle Volte a botte.* 44
CAP. III. *Delle varie specie de' Poliedri, e delle principali loro affezioni.* 62
CAP. IV. *Della solidità delle varie specie di Volte a Gavetta o Schifo.* 97
CAP. V. *Della superficie delle Volte a Gavetta.* 104
CAP. VI. *Della solidità delle varie specie di Volte a vela senza reguglio.* 111
CAP. VII. *Della superficie delle varie specie di Volte a vela senza reguglio.* 159
CAP. VIII. *Della solidità delle varie specie delle Volte a vela col reguglio.* 211
CAP. IX. *Della superficie delle varie specie di Volte a vela col reguglio.* 233
CAP. X. *Della solidità delle varie specie delle Volte a crociera senza reguglio.* 252
CAP. XI. *Della superficie delle varie specie di Volte a crociera senza reguglio.* 256
CAP. XII. *Della solidità, e della superficie de' Poliedri quadriformi generati da Zone sferoidiche.* 265
CAP. XIII. *Della solidità delle varie spescie di*

di Volte a crociera col reguglio. 283

CAP XIV. *Della superficie delle varie specie di Volte a crociera col reguglio.* 300

CAP. XV. *Della solidità dell' anima delle Lunette senza reguglio.* 344

CAP. XVI. *Della superficie delle Lunette senza reguglio.* 358

CAP XVII. *Della solidità dell' anima delle Lunette col reguglio.* 362

CAP. XVIII. *Della superficie delle Lunette col reguglio.* 371

CAP. XIX. *Della solidità delle varie specie di Volta a Cupola.* 374

CAP. XX. *Della superficie delle varie specie di Volta a Cupala.* 393

CAP. XXI. *Della solidità delle varie specie di Fescine.* 408

CAP. XXII. *Della supecficie delle varie specie di Fescine.* 415

Adm.

Adm. Rev. Dominus D. Salvator Rogerius S. Th. P. revideat, et in scriptis referat. Datum die 22. Novembris 1773.

F. X. Episc. Venafran. Vic. Gen.
J. Sparanus Can. Dep.

EMINENTISS. PRINCEPS.

Quantum in Mathematicis disciplinis ingenium subegerit licet aetate florens praeclarissimus Vincentius Lamberti, quammaxime prodit Architectonicum hoc, quod in publicum emittit volumen inscriptum *Voltimetria Retta.* Ibi sane fornicum, testudinum, aliarumque concamerati operis fabricationum theoriam prosequutus, earum genesim superficiem, soliditatem accuratis demonstrationibus perspicue aperit. Nullus heic locus iis relinquitur, quae vel Catholicae Fidei, vel morum honestati adversentur. Librum igitur ingenti usui rerum hujusmodi studiosis futurum edi posse censeo, dummodo tua Card. Amplissime, auctoritas accedat. Neapoli Pridie Kal. Decembr. 1773.

Emin. Tuae.

Addictiss. atque obsequentiss.
Salvator Rogerius.

Adm. Rev. D. Joseph Marzuccus, in hac Regia universitate Professor Primar. revideat, et in scriptis referat. Datum Neapoli die 10. *mensis Junii* 1773.

NIC. EPISC. PUT. CAP. MAI.

S. R. M.

SIGNORE

Per obbedire al rispettabilissimo ordine di V. M. ho letto il libro intitolato *Voltimetria Retta di Vincenzo Lamberti*, ove niente ho trovato, che si opponga al diritto della Sovranità, anzi ho ammirato l'acuto ingegno dell'Autore nell'uso delle Matematiche, per arricchire di sode, ed eleganti dimostrazioni quella parte di Architettura, che abbraccia la misura di varie specie di Volte. Onde se parrà a V. M., può darsi alle stampe. Napoli li 17 Ottobre 1773

D. Giuseppe Marzucco

Die 15. *mensis Decembris* 1773. *Neap.*

Viso Rescripto Suae Regalis Majestatis sub die 4. *currentis mensis, et anni, ac relatione Reverendi D. Joseph Marzucci, de commissione Rev. Regii Capp. Majoris, ordine praefatae Regalis Majestatis.*

Regalis Camera S. Clarae providet, decernit, atque mandat, quod imprimatur cum inserta forma praesentis suplicis libelli, ac approbationis dicti Revisoris; verum in publicatione servetur Regia Pragmatica. Hoc suum.

VARGAS MACCIUCCA. SALOMONIUS.

VIDIT FISCUS REG. CORONAE.

Ill. Marchio Citus Præs. S. R. C., et cæteri Illustres Aularum Præfecti tempore subscriptionis impediti. Registr. fol.

Carulli. Athanasius.

PREFAZIONE.

Commendabile è stato sempre mai quel'o innato desìo negli uomini di creare, e d inventar cose, affin di arricchire la Repubblica delle lettere di quelle Cognizioni, di cui ne sono state per lo passato prive. Tali sono le invenzioni della Poesia, de' Romanzi, de le Satire, delle Commedie, delle Tragedie, e d' altre scienze, le quali hanno avuto per obbietto la virtù, questi sono stati i mezzi più onesti, ed utili, che i saggi Filosofi hanno pensato per spargere nel Popolo le massime salutari. La introduzione delle belle arti, come sono la Scoltura, l' Architettura, la Pittura, rendono le Regioni magnifiche, e piacevoli. Ma la inventiva della più nobile scienza denominata la Matematica, riguardando questa la semplice, e pura verità, è stata stimata la più perfetta scienza di tutte l' altre dagli uomini ritrovate. Ed essendo di tutte le scienze speculative, la più ampia, e degna per la certezza, e fermezza del modo di dimostrare, perciò avanzando di gran lunga le altre, è la più eloquente, ed eccellente di esse. Questa Scienza ha istruito i Popoli d' uno esatto raziocinare; è stato lo scopo della divisione, e suddivisione de' poderi; ha provveduto alle diversificazioni delle cose naturali; ha somministrato macchine per la misura de' tempi, de'

luoghi, e de' pesi, affin di togliere gl' inganni nel Commercio Civile; ha scoverto le cagioni d gli effetti, che accadono in natura; e finalmente ha imitata la natura coll' arte. Essendo la Geometria il fonte della Matematica, meritamente Platone, chiamato il Divino, *pose al di fuori della sua Accademia* Geometriæ ignarus nullus ingrediatur; *ed Alcinoo Filosofo Platonico disse ne' suoi addottrinamenti* futurum Philosophum non debere esse geometriæ ignarum. *Sicchè dunque la Matematica è una scienza superiore a tutte le altre, ed alle belle arti, e senza cognizione di essa, uno chiamar non si può sapiente.*

Varii, e diversi Filosofi sono stati gl' inventori delle Matematiche scienze, tra' quali, come vuole Proclo, i Fenici sono stati i primi fabbri dell' Aritmetica, per i loro continui Commerci, e mercature; indi fu da Pittagora maravigliosamente ampliata, come anco dagli Arabi, Egizzii, e Greci, fu con varii problemi, e Teoremi parimenti illustrata. La Geometria inoltre ebbe origine dagli antichi Filosofi Egizziani, i quali vedendo continuamente i termini de' loro poderi distrutti dalle inondazioni del Fiume Nilo; gittarono i primi fondamenti di questa scienza, cercando mezzi di assicurarsi esattamente qual fosse il sito, la estensione, e la figura de' loro averi, come riferisce Servio ad Ecol. III. RADIO, id est, virga philosopherum, qua Geometræ lineas

neas indicant. Inventa autem hæc est ars tempore, quo Nilus plus æquo crescens confudit terminos possessionum, ad quos innovandos adhibiti sunt philosophi, qui lineis diviserunt agros: inde Geometria dicitur. *I principii di una sì nobile scienza dai Popoli Egizziani si conservavano a guisa di cosa sacra, e di Oracoli, ed a niun altro era lecito sapersi, se non a Principi, e Sacerdoti, del che ce ne fa piena testimonianza Arist. lib. 1. Metaph. Cap. 1., così dicendoci*; Circa Aegyptum Mathematicæ artes constitutæ sunt: illic enim gens Sacerdotum vacare permissa est. *Indi si distese la Geometria a misurare le cose celesti, dandoci i principii di tutta l'Astronomia, come anco della Prospettiva, Cosmografia, Meccanica, e di molte altre scienze, che da essa come da propria radice dipendono. Questa da Egitto si trasportò nella Grecia da Talete Milesio, ove molti acutissimi Filosofi l'ampliarono con inventare sempre più nuove utilità per gli uomini, tra' quali fu Pittagora, Anassagora, Ippocrate, Platone, Oenopide, Briso, Antifo, Teodoro, Teeteto, Aristarco, Eratostene, Archita, Euclide, Serenò, Ipsicle, Archimede, Apollonio, ed infiniti altri, di modo che crescendo di mano in mano, si è ridotta ne' nostri tempi a grandissima perfezione.*

In tutte le parti le Matematiche scienze sono state con sommo ingegno illustrate da tanti valenti uomini, che hanno impiegato tutto il di loro sapere a pensare nuovi principii, e si-

stemi, avendo facilitato il modo alla Repubblica letteraria per iscoprire sempre nuove cose. Alcune parti della Matematica sono state, e sono necessarie ai Popoli per conservare la società, ed il Commercio; altre sono utili per aver adornato i Popoli di tante idee magnifiche, e decorose, e resa ornata la immaginazione degli uomini; ed altre parti finalmente hanno applicato gli stessi uomini a tutte quelle conoscenze, che fortificano la ragione, e che assuefanno lo spirito all' attenzione, al discernimento, ed alla giustezza, alla proporzione, al Calcolo de' movimenti celesti, a rimontare a' principii per discendere alle conseguenze, e di vedere la stretta unione, che hanno le verità l' una coll' altra.

Molti dotti nelle Matematiche scienze si sono applicati a dar fuori un trattato di Voltimetria, o sia misura delle Volte, considerando di quanta necessità, esso sia, sì per sapere di che peso siano le Volte, che coprono gli edificii, per dargli quella grossezza ne' piedi dritti, che possa resistere ai continui sforzi di esse, si per conoscere di quanti materiali ella vien composta, come ancora per evitare le involontarie frodi, che giornalmente si fanno, o al Padrone, o al Fabbro, essendovi legge di doverle apprezzare a proporzion della di loro solidità. Ma invano hanno impiegato le loro fatiche, ed hanno consumato il tempo, di modo che posso dire con S. Matteo XI. 25. Abscondisti hæc a sapientibus, et prudentibus, et revelasti ea Parvulis.

Per

Per Volta s'intende quella Coperta di stanze, o altri edificii fatta di muraglia. Tre sotte di Volte vi erano, e si chiamavano dagli antichi Testudo, Fornix, et Concha. Testudo, *era una Volta a forma di emisfero, che copriva un edificio rotondo: la etimologia di una tal parola, Varrone la fa venire* a testa, quod testa tectum. *E Nonio dice* Testudines sunt loca in ædificiis camerata, ad similitudinem aquatilium testudinum, quæ duris tergoribus sunt, et incurvis, *e Virgilio.*

Tum foribus Divæ media testudine templi

Fornix, *era una Volta semicilindrica, e copriva con la sua cavità un edificio lungo, vi n detta* Fornix a forando. *Ed all fine* Concha, *era una Volta la quale formava una quarta parte della sfera, e copriva gli edificii semi ircolari.*

Essendosi ne' tempi presenti avanzate le idee, e le invenzioni, si sono cresciute le fo me delle Volte, a proporzione delle figure delle piante degli edificii sopra delle quali vengono ornate, e le denominazioni di esse sono le seguenti, Volta a botte, *ch' è quella istessa che dagli antichi veniva detta* Fornix; Volta poliedrica, *la quale copre un edifizio di pianta poligona;* Volta a Gavetta, *o sia* Schifo, *la quale copre una pianta quadrilatera;* Volta a vela *senza reguglio, e col reguglio, copre questa una pianta quadrilatera;* Volta a Crociera col reguglio, *e senza;* Volta a lunetta senza reguglio e col reguglio, *queste si formano in tutte le Volte,*

al-

allorchè si devono aprir lumi nelle di loro incosciature, Volte a Cupola, *queste coprono edificii, le piante de' quali sono di figura circolare, o ellittica;* Volta a mezze Scudelle, *è quella che copre un edificio di pianta semicircolare, o semiellittica; e finalmente* Fescine *vengono dette quelle fabbriche a lunule, che sono frammezzate tra gli archi che sostengono la Cupola. Di tutte queste sorti di Volte ne ho esposto la di loro generazione, e la teoria della di loro solidità, e superficie.*

Ho stimato dividere la presente opera in Capitoli, in ciascun de' quali ho trattato la teoria della superficie, e delle varie specie della formazione. Nella fine poi di ogni Capitolo vi ho esposto la pratica per trovare la superficie, e la solidità di quella, ed è trattata in esso con somma brevità. Siccè ne' metodi esposti vi si trova la esattezza e la brevità, cosa la quale non va sempre unita. Si avverte, che le citazioni che si trovano degli elementi di Geometria, tutte corrispondono all' opera latina stampata per la gioventù dal celebre Matematico D. Vito Caravelli, *le di cui opere si sono sparse colla fama per tutto il Mondo, e gli addottrinamenti del quale, per quanto posso, come suo più infimo discepolo, seguo. Per la generazione di alcune Volte ho dovuto inventar Teorie di alcuni nuovi solidi; uno de' quali l' ho dominato Ellittoide, ed ha per proprietà, che qualunque sezione si fa in esso, è Ellissi, e nella*

la teoria di un tal solido si fa vedere come trovasi la superficie di un Cono ellittico; l'altro l'ho chiamato poliedro quadriforme ellittico.

Questa presente Opera l'ho scritta per i veri Professori, i quali devono esser dotati di tutti i principii teoretici, cioè di Geometria, Aritmetica, Algebra, sezioni Coniche, Trigonometria, ed altro. perchè senza la cognizione di queste cose, è indubitato che non saprebbero alcuna cosa intorno alla facoltà, che professano; e perciò nemmeno intenderebbero alcuna cosa delle Teorie, che io ho scritto. Perciò ne ho formata la pratica ancora, sì a favore di quelli, che sono privi delle suddette facoltà, come per quelli che non si vogliono applicare a vederne le Teorie; della qual pratica ne ho formato un indice separato.

E comechè vi è statuto in questo regno, registrato nel libro delle Prammatiche sotto il titolo de Magistris artium, *nel quale si prescrive, che negli opprezzi, si deve considerare la Canna di una fabbrica della misura di palmi otto di lunghezza, ed altrettanto di larghezza, e la grossezza dev' essere di palmi due; perciò dopo essersi conosciuto di quanti palmi cubici vien composta una Volta, questi si devono dividere per due, ed il quoziente esprimerà la superficie, o sia la base del solido della Volta, ridotta a fabbrica della grossezza di palmi due, secondo il detto statuto.*

In questa Opera ho trattato delle sole Volte ret-

rette, cioè di quelle che sono situate orizzontalmente sopra la superficie terrestre. Spero al Signore Iddio, dandomi il suo divino aiuto, di cavar fuori un'altra Opera non meno utile, che necessaria come questa; ed è la Voltimetria Scalena, nella quale tratterò di tutte le consimili Volte, situate obbliquamente sopra la superficie terrestre, come ancora le azioni di dette Volte contra i piedi dritti dove poggiano, con facile regola pratica per determinare la grossezza di essi; e finalmente tratterò delle spinte delle terre, correggendo i principii dati da Monsieur de Belidor, *dandovi un metodo breve, e pratico per poter formar muri a poter resistere agli urti de' terrapieni.*

Quantunque da tutti i Professori si sono fino a questo tempo con diversi metodi calcolate le Volte, per non esservi stato, chi avesse trattato del modo di conoscere le di loro solidità, e superficie; perciò ho voluto scrivere su di tal materia per far cosa grata al pubblico, sperando di ricevere da tutti, ed in particolare dagli amici, e maestri, quel compatimento, che puole avere un discepolo sfornito; pur tuttavia ora senza alcun dubbio se ne saprà il valor di ciascuna di esse, con quei metodi esposti nella presente Opera. Prego solamente coloro che vorranno consuare di ricordarsi di Ovidio.

Si desunt vires, tamen est laudanda voluntas.

DELLA MISURA
DELLE VOLTE RETTE.

CAP. I.

Delle varie specie di Volte a botte, e delle di loro solidità.

DEFINIZIONI.

I. Si chiamerà Volta retta, quella formata sopra piedi dritti di eguale altezza sopra l' orizzonte.

II. Volta a botte è quella, che vien formata da un parallelepipedo semicilindrico vuoto, e rappresenta colla sua interna cavità, quasi una botte divisa per lungo, e perciò volgarmente così vien chiamata.

III. Corda, o sottesa della Volta a botte, è quella retta, che unisce gli estremi del curvo.

IV. Sesto della Volta, è quella retta, che forma angoli retti colla corda, e divide in due parti eguali la curvità di essa.

Da ciò nasce la divisione della Volta a botte in tre specie I. Se il sesto è eguale alla metà della corda, si dirà volta a botte di giusto sesto. II. Se il sesto è minore della

la metà della corda, si dirà di sesto depresso. III. Finalmente se è maggiore, si dirà di soprasesto.

V. Per grossezza della cima s' intende, la grossezza della fabbrica da sopra il curvo, come la KL. *Tav. I. Fig. I.*

VI. Ellissi si chiama una figura piana, nata dalla sezione obbliqua di un cono retto.

VII. Ordinate si dicono, quelle rette, che sono divise dal diametro della figura in due parti eguali.

VIII. Si chiamerà anima della Volta, il vuoto, che occupa tutto il concavo di qualunque Volta.

TEOREMA I.

Il parallelepipedo circonscritto ad un semicilindro, sta al solido del parallelepipedo semicilindro cavo, nella ragione di 14 a 3.

Tav. I. Fig. I. Sia il semicilindro AKBE, e circonscritto ad esso gli sia il parallelepipedo ACDBE. Dico, che il parallelepipedo ACDBE, stia al solido semicilindro cavo, ACDBEFI, nella ragione di 14: 3.

Il quadrato circonscritto al cerchio, sta al cerchio medesimo, come 14: 11. (a); onde an-

(a) *Pp. 12. de circ. dim. Caravelli.*

ancora le loro metà sono nella stessa ragione, e perciò il rettangolo ACDB, sta al semicerchio AKB, come 14: 11. Ma il parallelepipedo ACDBE, ed il semicilindro AKBE, avendo la stessa altezza BE, sono in ragion delle basi (*a*); dunque il parallelepipedo ACDBE, sta al semicilindro AKBE, come 14 : 11.; e convertendo (*b*) si avrà il parallelepipedo ACDBE, al solido semicilindro cavo ACDBEFI, come 14 : 3. Ciocchè doveasi dimostrare.

AVVERTIMENTO.

Da ciò che si è dimostrato, si rileva un metodo facilissimo ed esatto per poter calcolare la solidità di qualunque Volta a botte di giusto sesto, essendo data la corda il sesto, la lunghezza, e la grossezza alla cima, devesi:

I. Moltiplicare la corda, per il sesto e per la lunghezza, e si noti il prodotto.

II. Dopo i due numeri costanti 14, 3, ed il detto prodotto, si trovi un quarto proporzionale, al quale vi si unisce il prodotto della corda, lunghezza e grossezza alla cima, e la somma sarà la solidità di detta volta in quelle parti cubbe eguali all'aliquota comune.

Sia

(a) *Prop. 69 de Sphaer., et Cyl. Caravelli.*
(b) *Def. 15. lib. 5.*

Sia, per esempio, la corda AB = 10, sarà il sesto OK = 5; e sia la lunghezza BE = 20; e la grossezza della cima KL = 1. Il prodotto di AB, per OK, e BE, cioè il parallelepipedo ACDBE, sarà 1000; Indi si facci, come 14 a 5; così 1000 al quarto proporzionale $214\frac{2}{7}$, e questo è il solido parallelepipedo cavo AKBDCE, al quale bisogna aggiungerci il parallelepipedo CG ch' è 200; e tutto il solido semicilindro cavo AKBEGH, sarà $414\frac{2}{7}$, che sarà la solidità di detta volta.

DELLA ELLISSI.

TEOREMA II.

In ogni Ellissi, i quadrati delle ordinate applicate sopra l' asse minore, sono come gli rettangoli fatti dalle porzioni dello stesso asse prese da due vertici, e corrispondenti a dette ordinate.

Tav. I. Fig. 2. n. 1. Sia ADBC una Ellissi, e CD sia l' asse minore, ed AB il maggiore. Dico, che i quadrati formati sopra le ordinate EG, FH, siano come gli corrispondenti rettangoli DGC, DHC.

Per lo punto E, si tiri EK, parallela a CD. Per la proprietà della Ellissi il rettan-

tangolo di BO, in OA, o sia il quadrato di BO, sta al quadrato di OD, come il rettangolo di BK, in KA, al quadrato di EK (*a*); ma il quadrato di EK è il medesimo di quello fatto sopra OG; dunque si avrà

$$\overline{BO}^2 : \overline{OD}^2 :: \text{rett. BKA} : \overline{OG}^2,$$

e permutando $\overline{BO}^2 : \text{rett. BKA} = \overline{OD}^2 : \overline{OG}^2$, e convertendo

$$\overline{BO}^2 : \overline{BO}^2 - \text{rett. BKA} = \overline{OD}^2 : \overline{OD}^2 - \overline{OG}^2,$$

è permutando

$$\overline{BO}^2 : \overline{OD}^2 = \overline{BO}^2 - \text{rett. BKA} : \overline{OD}^2 - \overline{OG}^2;$$

ma $\overline{BO}^2 - \text{rett. BKA} = \overline{OK}^2 = \overline{GE}^2$ (*b*), ed $\overline{OD}^2 - \overline{OG}^2 = \text{rett. DGC}$; (*c*)

Dunque $\overline{BO}^2 : \overline{OD}^2 = \overline{EG}^2 : \text{rett. DGC}$. Della stessa maniera si può dimostrare, che

$$\overline{BO}^2 : \overline{OD}^2 = \overline{FH}^2 : \text{rett. DHC},$$

Dunque $\overline{EG}^2 : \text{rett. DGC} = \overline{FH}^2 : \text{rett. DHC}$; e permutando

$$\overline{EG}^2 : \overline{FH}^2 = \text{rett. DGC} : \text{rett. DHC}:$$

Ciocchè doveasi dimostrare.

TEO-

(a) *Prop. 6. tract. sect. con. Guid. Grand.*
(b) *Corol. 1. prop. 5. lib. 2.*
(c) *Prop. 5. lib. 2.*

TEOREMA III.

Se un semicerchio, ed una semiellissi hanno uno stesso diametro, il semicerchio sta alla semiellissi, come il diametro comune all' altro diametro della semiellissi; ovvero come gli semidiametri.

Tav. I. Fig. 3. n.1., e 2. Abbia il semicerchio ACB, e la semiellissi ADB uno stesso diametro AB. Dico, che il semicerchio ACB sta alla semiellissi ADB, come OB : OD.

Si concepisca tirata l' ordinata co, infinitamente vicina alla ordinata CO. Per la proprietà del cerchio il quadrato fatto da CO, è eguale al rettangolo AOB; e $\overline{co}^2$ = rett. AoB; onde si avrà.

$\overline{CO}^2 : \overline{co}^2$ = rett. AOB : rett. AoB;

Ma per la proprietà della Ellissi, siccome si è dimostrato nel Teorema precedente

$\overline{OD}^2 : \overline{od}^2$ = rett. AOB : rett. AoB;

Dunque $\overline{CO}^2 : \overline{co}^2 = \overline{OD}^2 : \overline{od}^2$, e

CO : co = OD : od (*a*)

E questo ha luogo da pertutto, cioè da qualunque punto della circonferenza ACB, ab-

(a) *Prop. 22. lib. 6.*

abbassando l' ordinata al diametro. Sicchè tutte le ordinate nel semicerchio applicate sopra il diametro AB, sono in ordinata ragione colle corrispondenti ordinate nella semiellissi ADB. Ma quando più grandezze sono proporzionali, la somma degli antecedenti, sta alla somma de' conseguenti, come uno antecedente al suo conseguente (*a*). Dunque la somma delle ordinate nel semicerchio, che è l' istesso semicerchio ACB, sta alla somma delle infinite ordinate nella semiellissi, ovvero alla stessa semiellissi ADB, come CO, ovvero OB : OD. Ciocchè doveasi dimostrare.

COROLLARIO I.

Essendosi dimostrato, che $\overline{CO}^2 : \overline{co}^2 = \overline{OD}^2 : \overline{od}^2$; e CO : co = OD : od; sicchè dunque se un cerchio, ed una semiellissi hanno un diametro di comune, i quadrati delle ordinate del cerchio, sono proporzionali ai quadrati delle ordinate della Ellissi; e proporzionali ancora sono le semplici ordinate.

COROLLARIO II.

Essendo OB, ed OD, metà degli assi della Ellissi, si avrà ancora, come il semi-

(a) *Prop. 12. lib. 5.*

micerchio, ovvero il cerchio, il di cui diametro è uno degli assi, alla semiellissi, o pure alla Ellissi totale, così l'asse AB, che è comune col diametro del cerchio, all'altro asse 2OD.

COROLLARIO III.

Essendosi dimostrato, che le ordinate del cerchio applicate al diametro, siano proporzionali alle ordinate della Ellissi applicate sopra l'istesso diametro, ne segue con eguale raziocinio; che il semisegmento circolare GAI, stia al semisegmento Ellittico HAI, come GI: HI; ovvero come CO: DO; e tutto il segmento circolare, starà a tutto il segmento corrispondente della Ellissi, come CO, oppure CO: DO.

COROLLARIO IV.

I triangoli GOI, HOI, avendo la stessa base IO, sono in ragione delle altezze GI, HI (*a*); ma in questa stessa ragione sono gli segmenti corrispondenti;
dunque GAI: HAI = GOI: HOI;
e GAI + GOI: HAI + HOI = GOI: HOI (*b*);
Ma GOI: HOI = GI: HI. Dunque il setto-

(a) *Schol. 1. prop. 1. lib. 1.*
(b) *Prop. 12. lib. 6.*

tore circolare AGO, sta al settore Ellittico AHO, come GI: HI, ovvero come OB: OD; oppure come il diametro AB, del cerchio, all'asse 2OD.

COROLLARIO V.

Essendo AGO: AHO = BO: DO;
ma BO: DO = ACB: ADB. (*a*);
dunque AGO: AHO = ACB: ADB. Sicchè dunque il settore AGO, del cerchio, sta al settore AHO, della Ellissi, come il semicerchio ACB, ovvero il cerchio totale, alla semiellissi ADB, oppure alla intiera Ellissi. Ma gli segmenti, siccome si è dimostrato sono nella stessa ragione di BO: DO. Dunque ancora gli segmenti, sono nella stessa ragione del circolo, e della Ellissi.

COROLLARIO VI.

Essendo gli segmenti proporzionali col circolo, e colla Ellissi, che hanno un diametro di comune; Perciò il semisegmento CAO, o sia quarta parte del cerchio, starà a DAO, come il semisegmento GAI, sta al semisegmento AHI, e permutando CAO: GAI = DAO: HAI, e dividendo CGIO: GAI = DHIO: HAI, e permutando CGIO: DHIO = GAI: HAI;

(a) *Teor. 3.*

Ma GAI : HAI = BO : DO ;

Dunque CGIO : DHIO = BO : DO ; oppure come il circolo, il di cui diametro è AB, alla Ellissi. Sicchè dunque qualunque porzione di cerchio, sta alla sua corrispondente nella Ellissi, come il cerchio totale, alla intiera Ellissi.

COROLLARIO VII.

Tav. 1. Fig. 5. Dicasi il segmento circolare DBX, S; ed Fbu, s; come ancora il segmento Ellittico GBR, chiamasi SE; si averà

$$S : SE = DC : GC$$

Moltiplicando per DC

$$S : SE = \overline{DC}^2 : DC \times GC$$

ovvero a DC×FE, essendo GC, eguale ad FE; e permutando

$$S : \overline{DC}^2 = SE : DC \times FE ;$$

Ma $S : s = \overline{DC}^2 : \overline{FE}^2$ (a)

e permutando $S : \overline{DC}^2 = s : \overline{FE}^2$;

Dunque $SE : DC \times FE = s : \overline{FE}^2$,

e permutando $SE : s = DC \times FE : \overline{FE}^2$

dividendo per FE

Si averà SE : s = DC : FE ;

ovvero come eG : eF.

Sicchè dunque il segmento Ellittico interseca-

(a) *Corol. 2 prop. 5 circ. dim : Caravelli.*

to da una retta parallela all'asse minore, sta al segmento circolare corrispondente nel cerchio, il di cui diametro è l'asse minore, come eG : eF, ovvero come l'asse maggiore, all'asse minore, oppure come la Ellissi totale, al cerchio; e nella stessa ragione saranno gli settori corrispondenti nella Ellissi, e nel cerchio, che ha per diametro l'asse minore.

TEOREMA IV.

Il rettangolo circonscritto alla Ellissi, fatto dall' asse maggiore, e minore, sta alla Ellissi, come 14 : 11.

Sia AF, il rettangolo circonscritto alla semiellissi ADB. Dico, che il rettangolo AF sta alla semiellissi ADB, come 14 : 11. *Tav. I. Fig. 3. n. 1. 2.*

Sopra l'asse AB, come diametro si faccì il semicerchio ACB, e si prolunghi il semiasse OD, fintantocchè incontra la linea circolare nel punto C, e per esso tirisi la CE, parallela ad AB, che incontra la BF, nel punto E; sarà il rettangolo AE, metà del quadrato circonscritto al cerchio, il di cui diametro è AB. In oltre il semicerchio ACB, sta alla semiellissi ADB, come CO : DO (*a*). Ma CO : DO = rett. AE : rett. AF (*b*).

On-

(a) *Teor, 3.*
(b) *Schol. 1. prop. 1. lib. 6.*

Onde ACB : ADB = rett. AE : rett. AF ; e permutando , ed invertendo , si avrà

rett. AE : ACB = rett. AF : ADB ;

ma il rettangolo AE , sta al semicerchio ACB, come 14 : 11. (a) ; Dunque ancora il rettangolo AF , starà alla semiellissi ADB , come 14 : 11 ; e per conseguenza il rettangolo fatto dall'asse maggiore , e minore , sta alla Ellissi , come 14 : 11. Giocchè doveasi dimostrare.

COROLLARIO I.

Da ciò si è dimostrato se ne deduce , che qualunque Ellissi sta a qualunque cerchio, come il rettangolo circonscritto alla Ellissi , al quadrato circonscritto al cerchio , e nella stessa ragione saranno gli corrispondenti segmenti , e settori.

COROLLARIO II.

Il rettangolo AF , sta alla semiellissi ADB , nella ragione di 14 : 11. Convertendo , si averà , che il rettangolo AF , sta allo spazio ADBFK , come 14 : 3 ; e comecchè gli solidi avendo la istessa altezza , sono in ragion delle basi , così il parallelepipedo , la di cui base è AF , starà ad perallelepipedo cilindro Ellittico cavo , la di cui base e lo spazio AD-

(a) *Prop. 14. de circ. dim. Caravelli.*

ADBFK, avendo la istessa altezza, come 14 : 3.

AVVERTIMENTO. I.

Essendosi dimostrato, che il rettangolo circonscritto ad una Ellissi, sta alla Ellissi nella ragione di 14 : 11; e questo avendo luogo in tutte l' Ellissi, gli di cui assi sono ad angoli retti, si rileva da ciò, che l' Ellissi saranno nella ragione de rettangoli circonscritti. E siccome questi rettangoli si fanno eguali, sempre quando le basi, e le altezze sono ugnali, così l' Ellissi si faranno ugnali, quando gli assi conjugati sono eguali, e così ancora saranno in ragion degli assi minori, quando gli assi maggiori sono ugnali; ed al contrario saranno nella ragione degli assi maggiori, quando gli minori sono eguali; e se sono gli uni, e gli altri disugnali, saranno l' Ellissi in ragion composta degli assi maggiori, e degli assi minori. Egli è da notarsi ancora, che possono essere eguali le due Ellissi, avendo gli assi maggiori, e minori disugnali, ma devono essere gli assi maggiori reciprocamente proporzionali alli minori.

E comecchè due rettangoli per esser simili devono avere gli lati attorno ad un angolo proporzionali, così si diranno simili due Ellissi, quando gli assi maggiori, sono proporzionali agli assi minori. E finalmente siccome gli rettangoli simili, sono nella duplicata ra-

ragione de lati omologi, così ancora due Ellissi simili, sono nella duplicata ragione, o degli assi maggiori, ovvero de minori.

AVVERTIMENTO II.

Tav. I. Fig. 3. n. 1. 2. Da quel che si è dimostato nel Corollario II. del Teorema precedente si rileva il metodo di calcolare la seconda, e terza specie di Volta a botte; cioè, se il sesto DO (*n.* 1.) è minore della metà della corda AB, allora la cavità di detta volta è un cilindro Ellittico diviso per metà da un piano, che passa per l'asse maggiore della Ellissi, che gli serve di base, se all'incontro questo piano passa per l'asse minore, e divide per lungo il detto cilindro, la di cui metà forma la cavità di detta volta, come osservasi al *n.* 2, sarà la terza specie di volta a botte, il di cui sesto DO, è maggiore della metà della suttesa AB. In tutti i tre casi, per avere il valore della solidità di ciascuna di esse, è necessario l'esser cognita, la corda, il sesto, la lunghezza, e la grossezza della cima; Indi devesi:

I. Moltiplicare la corda, per il sesto, e per la lunghezza, ed il prodotto si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 14, 3, ed il detto prodotto, si ritrovi un quarto proporzionale; al quale vi si unisca il prodotto della corda, lunghezza, e grossezza alla cima, e la

e la somma sarà la solidità di detta volta in quelle parti cube eguali all'aliquota comune,

Sia per ragion di esempio, una volta a botte di sesto depresso da calcolarsi la di cui suttesa AB = 30, il sesto DO = 10, e sia la lunghezza BC = 45, e la grossezza della cima DL = $1\frac{1}{2}$. Il solido AFC, sarà 13500; Indi si faccì, come 14, a 3, così 13500., al quarto proporzionale $2892\frac{6}{7}$, al quale aggiontovi il solido KG, che è 2025, la somma $4917\frac{6}{7}$, sarà il valore della solidità di detta volta. *Tav. I. Fig. 4.*

TEOREMA V.

Sia AKBL, un cerchio descritto sopra l'asse maggiore AB, della Ellissi AIBP, ed al bP sia un altro cerchio descritto sopra l'asse minore IP, della stessa Ellissi, nel quale vi sia adattata l'ordinata FE, sopra il diametro ab, e dal centro H, al punto F, tirisi la retta HF, e si prolungi finchè incontri la linea circolare AKBL, nel punto D, dal quale si abbassi l'ordinata DC, al diametro AB, che interseca la Ellissi nel punto G. Dico, che unendosi il punto G, col punto F, per mezzo della retta FG, questa sarà parallella all'asse maggiore AB. *Tav. I. Fig. 5.*

Essendo EF, CD, ordinate al diametro AB, queste saranno parallele tra loro, per la

proprietà delle ordinate applicate sopra il diametro del cerchio, e perciò

HD : DC = HF : FE (*a*),

e permutando HD : HF = DC : FE :

ma HD : HF = HK : HI, per essere raggi dello stesso cerchio ; Dunque

HK : HI = DC : EF ;

ma HK : HI = DC : GC (*b*)

Sicchè dunque DC : GC = DC : EF ; e pertanto GC, sarà eguale ad EF (*c*), e queste sono parallele. Onde le altre due FG, EC; che le uniscano saranno eguali, e parallele tra loro (*d*). Ciocchè doveasi dimostrare.

COROLLARIO

Sicchè se nella Ellissi AIBP, tirisi la retta gG, parallela all' asse maggiore AB, ed interseca la Ellissi negli punti g, G, ed il cerchio descritto sopra l' asse minore, ne punti f, F ; e tirando la HF, che prolungata incontra la linea circolare descritta sopra l' asse maggiore nel punto D ; sarà la retta DC, che passa per lo punto G, ordinata sopra l' asse maggiore, e per conseguenza parallela ad EF.

TEO-

(a) *Prop. 2. lib. 6.*
(b) *Teor. 3.*
(c) *Prop. 9. lib. 5.*
(d) *Prop. 35. lib. 1.*

TEOREMA VI.

SE fF, sia un lato del quadrato inscritto nel circolo aIbP, servendoci della stessa ipotesi data, e tirando la HF, fintantocchè incontra la linea circolare nel punto D, descritta sopra l'asse maggiore AB, come diametro, questa prolungata incontrerà la tangente KN, tirata parallela ad AB, nel punto N, e tirandosi la retta DG, che passa per lo punto G, e perfezzionandosi le quadrilatere figure MN, dD, OQ, cG. Dico, I.° che MN, dD, siano quadrati; II.° che il rettangolo cG, sia simile al rettangolo OQ; III.° che il quadrato MN, stia al quadrato dD, come il rettangolo OQ, al rettangolo cG. *Tav. I. Fig. 5.*

I. Essendo hF, quadrato sarà He = eF; ma essendo KN, parallela ad HB, e per conseguenza parallela ad eF; sarà HK : KN = He : eF, e per conseguenza KN, sarà eguale ad HK, ovvero ad HB, essendo raggi dello stesso cerchio. Sicchè dunque essendo le due KN, HB, eguali, e parallele, saranno le altre due NB, KH, eguali, e parallele (*a*). Della stessa maniera si dimostra, che HL, sia eguale, e parallela a BT, e ad AM, e che AH, sia eguale, e parallela, ad ML, e ad UK, e così andando avanti. Onde la figura MUNT, sarà un parallelogrammo equilatero, ed essendo

(*a*) *Prop. 33. lib. 1.*

do l'angolo HKN, retto; sarà retto ancora l'angolo KNB (*a*): Dunque la figura MTNU, sarà quadrato. Inoltre, essendo gli due cerchi AKBL, albP, concentrici, gli raggi HF, Hf, Hh, Hu, tirati dal centro agli angoli del quadrato hF, questi prolungati segneranno nel cerchio AKBL, gli punti y, D, X, d, i quali uniti colle rette yD, DX, Xd, dy, sarà la figura dyDX, quadrato, e ciò è chiaro. Ciocchè in primo luogo si dovea dimostrare.

II. Per il Corollario del Teorema precedente la DC, che passa per lo punto G, è perpendicolare all' asse AB, ed è parallela ad EF, onde l'angolo FGC, sarà retto per essere eguale all' angolo cFE; ed essendo prolungata in R, sarà tutta GR, parallela ad Fu, così ancora la gc, sarà parallela ad fh; onde la figura cG, sarà rettangola. In oltre essendo Di, parallela ad Fe, si avrà, che

HD : Di = HF : Fe (*b*);

Ma HD = HB; Di = Ge; ed HF = HI, ch' è eguale a BQ; ed Fe = cH = GC; Dunque HB, ovvero PS : Ge = BQ: GC ovvero PS : pR = BS : CR ed i loro dupli anche saranno proporzionali, e perciò OS : cR = SQ: GR, e permutando OS : SQ = cR : GR; e per conseguenza i due rettangoli OQ, cG, sa-

(a) *Prop. 29. lib. 1.*
(b) *Prop. 2. lib. 6.*

ranno simili tra loro (*a*). Ciocchè in secon-
luogo doveasi dimostrare.

III. Essendo NB parallela a DC, nel trian-
lo NHB, si avrà, che HB : HC = BN :
; ed essendo il rettangolo OQ, simile al
ttang lo cG, ed essendo i lati del primo,
ralleli agli lati del secondo, la diagonale
Q del primo, passerà per gli vertici degli
g li, c, G del secondo. E perciò sarà HBQ,
iangolo; ed essendo GC, parallela a BQ,
avrà, che HB : HC = BQ : GC;
nde BN : DC = BQ : GC (*b*)
l i loro dopli anche saranno proporzionali,
perciò NT : DX = QS : GR,

sarà $\overline{NT}^2 : \overline{DX}^2 = \overline{QS}^2 : \overline{GR}^2$ (*c*);

:a $\overline{QS}^2 : \overline{GR}^2 :=$ rett. OQ : rett. cG (*d*).
icchè dunque il quadrato MN, sta al qua-
rato dD, come il rettangolo OQ, al rettan-
olo cG. Ciocchè doveasi in terzo luogo di-
ostrare.

COROLLARIO

Essendo il quadrato MN, circonscritto al
erchio AKBL doppio del quadrato inscritto
D, sarà il rettangolo OQ, circonscritto alla

El-

(a) *Def. 1. lib. 6.*
(b) *Prop. 11. lib. 5.*
(c) *Prop. 22. lib. 6.*
(d) *Prop. 20. lib. 6.*

Ellissi, doppio del rettangolo cG, inscritt nella medesima Ellissi. Qual rettangolo cG siccome si è descritto si dirà in appresso in scritto nella Ellissi.

AVVERTIMENTO

Sicchè essendo il quadrato MN, doppio de quadrato dD, ed il rettangolo OQ, doppio del rettangolo cG; e siccome le Ellissi sono come i rettangoli circonscritti, così ancora le Ellissi saranno tra loro, come i rettangoli inscritti; E qualunque Ellissi, starà a qualunque cerchio, come il rettangolo inscritto in essa, al quadrato inscritto in esso.

TEOREMA VII.

Il cerchio, il di cui diametro è medio proporzionale tra l'asse maggiore, e minore, sarà eguale alla Ellissi.

Tav. 1. Fig. 2. n. 1. 2. Sia il cerchio LQM, il diametro del quale LM, sia medio proporzionale tra AB CD. Dico, che il cerchio LQM, sia eguale alla Ellissi ADBC.

Essendo AB, LM, CD, continuamente proporzionali sarà $\overline{AB}^2 : \overline{LM}^2 = AB : CD$ (a)

m

(a) *Def. 7. lib. 6.*

AB, sta a CD, come il cerchio, il di
. diametro è AB, alla Elissi ADBC (a);
$\overline{AB}^2$: $\overline{LM}^2$, come il cerchio, il di cui
metro è AB, al cerchio LQM (b), Dun-
e il cerchio, il di cui diametro è AB, sta
cerchio LQM, come il medesimo cer-
o, che ha per diametro AB, alla Elissi
BC, e pertanto il cerchio LQM, sarà
ale alla Ellissi ADBC (c). Ciocchè doveasi
mostrare.

AVVERTIMENTO

Da ciò si rileva un altro metodo da poter
colare una volta a botte di sesto depresso,
vero di soprassesto; ritrovando una media
oporzionale, tra la corda, il doppio sesto,
questa sarà il diametro del cerchio eguale
a Ellissi, che forma la sua sezzione, la ca-
à di detta volta, e ritrovando il valore del
micerchio, il quale si toglie dal rettangolo
to dalla corda, e dal sesto, l'eccesso si mol-
plica per la lunghezza di detta volta, ed al
odotto, vi si aggiunga il solido della gros-
zza alla cima; la somma sarà il valore della
lidità di essa.

TEO-

(a) *Teor. 3.*
(b) *Prop. 1. lib. 12.*
(c) *Pro. 9p lib. 5.*

TEOREMA VIII.

SE la prima quantità A, sta alla secon
B, come la stessa B, sta alla terza C; e
quarta D, sta alla quinta E, come la stessa
sta alla sesta F, e la prima A, sta alla ter
C, come la quarta D, sta alla sesta F. Di
che la prima A, starà alla seconda B, come
quarta D, alla quinta E.

Essendo A, B, C, continuamente proporziona
$A : C = \overline{A}^2 : \overline{B}^2$; così ancora $D : F = \overline{D}^2 : \overline{E}$
ma $A : C = D : F$; dunque $\overline{A}^2 : \overline{B}^2 = \overline{D}^2 : \overline{E}$
ed A starà a B, come D, sta ad E (*a*). Cio
chè doveasi dimostrare.

PROBLEMA I.

Tav. 1. Fig. 3. n. 1. 2. *Dato un settore Ellittico, ritrovare un settor circolare ad esso eguale.*

Fig. 2. n. 2. Sia dato il settore Ellittico AHO. Ritrovare u settore circolare ad esso uguale.

Si facci il circolo LQM, eguale alla El lissi ADB (*b*), e tra GI, ed HI, si trovi un media proporzionale LS, la quale si pongh ad angolo retto con il diametro LM, e pro prio nel punto L; e per lo punto S, tiris

(a) *Prop. 22. lib. 6.*
(b) *Teor. 7.*

a parallela SQ, ad LM, che incontra la periferia nel punto Q, e dal punto Q, si abbassi la QR, perpendicolare ad LM, e tirisi la PQ. Dico, che LQP, sia uguale ad AHO.

Per costruzione GI : QR = QR : HI,
e CO : LP = LP : DO (*a*)
ma GI : HI = CO : DO (*b*)
Dunque GI : QR = CO : LP (*c*),
Ma CO = GO ; ed LP = QP; Onde ancora
GI : QR = GO : QP,
e permutando GI : GO = QR : QP.
Sicchè il triangolo IGO, è simile al triangolo RQP (*d*); e per conseguenza l'angolo GDA, è eguale all'angolo QPL, ed il settore GOA, è simile al settore, QPL; e perciò il settore GOA, sta al settore QPL, come $\overline{GO}^2 : \overline{PQ}^2$ (*e*), ovvero come il semicerchio ACB, al semicerchio LQM (*f*), e permutando, si avrà che il settore GOA, stia al semicerchio ACB, come il settore QPL, al semicerchio LQM; Ma il settore GOA, sta al semicerchio ACB, come il settore AHO, alla semiellissi ADB (*g*) dunque; il

(a) *Teor. 7.*
(b) *Color. 1. Teor. 3.*
(c) *Teor. 8.*
(d) *Prop. 7. lib. 6.*
(e) *Corol. Prop. 6. de circ. dim. Caravelli*
(f) *Prop. 2. lib. 12.*
(g) *Corol 4. Teor. 3.*

il settore AHO, sta alla semiellissi ADB, come il settore QPL, al semicerchio LQM, ma la semiellissi ADB, è uguale al semicerchio LQM (*a*), dunque il settore AHO, sarà anche eguale al settore LQP. Ciocchè doveasi fare, e dimostrare.

COROLLARIO.

Essendo l' angolo GOA, eguale all' angolo QPL, sarà il semisegmento AGI, simile al semisegmento LQR; E perciò il semisegmento AGI sta al semisegmento LQR, come $\overline{GO}^2$. $\overline{PQ}^2$ (*b*), ovvero come il semicerchio ACB, al semicerchio LQM, e permutando si avrà, che il semisegmento AGI, sta al semicerchio ACB, come il semisegmento LQR, al semicerchio LQM, ma il semisegmento AGI, sta al semicerchio ACB, come il semisegmento AHI, alla semiellissi ADB (*c*); dunque il semisegmento AHI, sta alla semiellissi ADB, come il semisegmento LQR, al semicerchio LQM; Ma la semiellissi ADB, è eguale al semicerchio LQM; Dunque ancora il semisegmento AHI, sarà eguale al semisegmento LQR.

AV-

(a) *Teor. 7.*
(b) *Corrl. 2. Prop. 5. de circ. dim. Caravelli.*
(c) *Corol. 5. Teor. 3*

AVVERTIMENTO.

Se le volte a botte fossero costrutte a segmenti circolari, ovvero Ellittici, in tal caso da quello si è dimostrato, è facile averne il di loro valore. Con dedurne dal rettangolo, che ha per base la corda dell' arco del segmento, e per altezza il sesto, il segmento medesimo, ed il residuo sarà la base del parallelepipedo segmento Cilindrico Cavo, che moltiplicato per la lunghezza, si avrà il suo valore, al quale aggiuntovi il solido parallelepipedo, che ha per base il rettangolo fatto dalla corda, e dalla lunghezza, e per altezza la grossezza della cima; la somma sarà il valore della solidità di una tal volta.

Per avere il segmento Ellittico fa di bisogno ritrovare l'asse maggiore, e l'asse minore della Ellissi totale, acciò si possa trovare il cerchio eguale a detta Ellissi, ed indi calcolarne il segmento eguale al segmento Ellittico; e per ritrovare l'asse maggiore, e minore di una Ellissi, si propone il seguente.

PROBLEMA II.

Date due ordinate in una porzione Ellittica, la suttesa della quale sia parallela ad uno degli assi, ritrovare l'asse maggiore, e l'asse minore.

Tav. I. Fig. 6. Siano date le due ordinate EF, LD, nella porzione Ellittica CBD; ritrovare l'asse maggiore, e l'asse minore.

Dopo le due BE, EF, si trovi una terza proporzionale, e sia EH; indi dopo le due BL, LD, si trovi un'altra terza proporzionale, e sia LI, e dal punto H, al punto I, tirisi la HI, e si prolunghi fintantocchè incontri la porzione BL dell'asse, nel punto A; dico I.° che AB, sia uno degli assi conjugati: si divida inoltre la BA, in due parti eguali nel punto O, e si faccia la retta X, media proporzionale tra BL, ed LA, ed in ordine alle tre X, LD, BO, si ritrovi la quarta proporzionale OM; dico II.°, che MO., sia la metà dell'altro asse.

I. Essendo BE, EF, EH, continuamente proporzionali, sarà $\overline{EF}^2$ = rett. BEH; così ancora $\overline{LD}^2$ = rett. BLI, onde sarà

$$\overline{EF}^2 : \overline{LD}^2 = BE \times EH : BL \times LI;$$

ma

ma $EH : LI = EA : LA$ (*a*) ;

dunque $\overline{EF}^2 : \overline{LD}^2 = BE \times EA : BL \times LA$; sicchè per la proprietà delle ordinate applicate sopra uno degli assi della Ellissi ; BA sarà uno degli assi conjugati ; ciocchè in primo luogo doveasi fare , e dimostrare

II. Per costruzione $X : LD = BO : OM$;

onde $\overline{X}^2 : \overline{LD}^2 = \overline{BO}^2 : \overline{OM}^2$: (*b*)

ma $\overline{X}^2 =$ rett. BLA , e $\overline{BO}^2 =$ rett. BOA ;

dunque rett. BLA : $\overline{LD}^2 =$ rett. BOA : $\overline{OM}^2$. Ma questa è proprietà della Ellissi ; sicchè dunque la OM , è metà dell' altro asse. Ciocchè in secondo luogo doveasi trovare e dimostrare.

AVVERTIMENTO I.

Per maggiormente rischiarire una tal teoria. Siano date , per esempio , le due ordinate EF , LD , della porzione Ellittica CBD , cioè $EF = 4$; $LD = 6$; e date le ascisse corrispondenti , cioè $BE = 2$; $BL = 4$, sarà $EH = 8$, terza proporzionale in ordine alle due BE , EF ; indi si faccia come $BL : LD = LD : LI$, che sarà eguale a 9. E finalmente per primo termine di un altra pro-

(a) *Prop. 2. lib. 6.*
(b) *Prop. 22. lib. 6.*

porzione si faccia HK = 1, eccesso di EH. sopra LI, per secondo KI, eccesso di BL, sopra BE, e per terzo EH, al quarto proporzionale EA = 16, al quale aggiuntovi BE = 3, si avrà l'asse AB = 18.

Inoltre, tra BL, LA, si trovi la media proporzionale X, la quale sarà 7. 48; e si faccia, come X: LD = BO: OM = 7. 351; ed il suo duplo 14. 702, sarà l'altro asse.

AVVERTIMENTO II.

Per ritrovare ora il valore di vna volta a botte, essendo la sua cavità un segmento Ellittico, basta ritrovare lo spazio di detto segmento, il quale si avrà, o per il Corol. V. Teor. III; oppure per il Corol. Probl. I. Quali maniere, dipendono dal conoscere prima l'asse maggiore, e l'asse minore; ed indi ad aver cognizione dello spazio di un segmento circolare, il quale per il detto Corol. V. sta al segmento Ellittico, nella ragione delle ordinate del circolo, e della Ellissi, e per il citato Corollario del Problema, eguale al segmento Ellittico. Quale spazio di segmento di cerchio è facile rinvenirlo; perchè o vi sono tanti dati, quanti vi bisognano per conoscerne il suo valore, secondo Archimede ne'suoi Teoremi ha esposto; ovvero, chi si diletta del calcolo trigonometrico, essendo cognita la suttesa, ed il sesto, o sia saetta, potrà saperne il suo valore, siccome in appresso si dirà.

AV-

AVVERTIMENTO. III.

Ed acciocchè non rimanga indeterminata una tal teoria, esporrò il modo come potersi segnare l'asse maggiore, e l'asse minore in una Ellissi, nella quale sia incognito anche il centro. Si tirino dentro la Ellissi data, due rette, le quali siano parallele tra loro, e coll'incontro del perimetro della Ellissi, si formeranno gli estremi di dette due rette; si dividano le dette due rette in due parti eguali, ed unendoci a questi punti delle divisioni una terza retta, questa si prolunghi dall'una, e l'altra parte, fintantocchè giunga ad incontrare il perimetro di detta Ellissi, ed il punto, che divide in due parti eguali la detta retta sarà il centro della detta Ellissi; e fattosi centro in un tal punto, e con qualunque intervallo descrivendosi un cerchio, il quale deve colla sua periferia intersecarsi col perimetro della Ellissi, e s'intersecherà in quattro punti, si dividano gli archi circolari framezzati da detti punti d'intersezzioni, in due parti eguali, ed unendosi i punti, che dividono gli archi opposti in due parti eguali, per mezzo delle rette, questi saranno gli assi conjugati, la ragione è chiara, per la proprietà della Ellissi.

TEOREMA IX.

Tav. I. Fig. 7. SE sopra le due rette AB, GH, si formano i due triangoli equilateri AEB, GLH, e colli medesimi intervalli AB, GH, si descrivano sopra i lati AE, EB; GL, LH; gli archi AE, EB; GL, LH. Dico, che tutto lo spazio AEB, sta a tutto lo spazio GLH, come il triangolo AEB, al triangolo GLH.

Essendo i due triangoli AEB, GLH, equilateri, saranno simili tra loro, onde essendo l'angolo EAB, eguale all'angolo LGH, sarà il settore EAB, simile al settore LGH, ed il segmento EB, simile al segmento LH; e così ancora sarà il settore ABE simile al settore GHL e perciò il settore ABE sarà al settore GHL, come $\overline{AB}^2 : \overline{GH}^2$ (*a*); ma $\overline{AB}^2 : \overline{GH}^2$, come il segmento EB, al segmento LH; dunque il settore ABE, sta al settore GHL, come il segmento EB, al segmento LH, e permutando il settore ABE, starà al segmento EB, come il settore GHL, al segmento LH, e componendo, e permutando tutto lo spazio AEB, starà a tutto lo spazio GLH, come il segmento EB, al segmento LH, ovvero come $\overline{AB}^2 : \overline{GH}^2$; ma $\overline{AB}^2 : \overline{GH}^2$, come il triangolo AEB,

(a) *Corol. Prop. 5. de circ. dim. Caravelli.*

AEB, al triangolo GLH, (a); dunque lo spazio AEB, sta allo spazio GLH, come il triangolo AEB, al triangolo GLH. Ciocchè doveasi dimostrare.

COROLLARIO I.

Il triangolo AEB, sta al triangolo GLH, come il rettangolo ABCD, al rettangolo GHIK, avendo la stessa base, e la medesima altezza colli detti triangoli: dunque ancora lo spazio AEB, starà allo spazio GLH, come il rettangolo ABCD, al rettangolo GHIK.

COROLLARIO II.

Il rettangolo ABCD, sta al rettangolo GHIK, come tutto lo spazio AEB, a tutto lo spazio GLH, e permutando il rettangolo ABCD, sta allo spazio AEB, come il rettangolo GHIK, allo spazio GHI, e convertendo il rettangolo ABCD, starà allo spazio AEBCD, come il rettangolo GHIK, allo spazio GLHIK.

COROLLARIO III.

Se sopra i detti spazii AEBCD, GLHIK, come basi, si eriggano i solidi AEBCDN,

(a) *Prop. 1. lib. 6.*

GLHIKO; questi avranno eguali ragioni con i parallelepipedi ACN, GIO (*a*). Ed il parallelepipedo ACN starà al solido parallelepipedo cavo AEBCDN, come il parallelepipedo GIO, al solido parallelepipedo cavo GLHIKO.

COROLLARIO IV.

Il parallelepipedo ACN, avendo eguale altezza, col solido parallelepipedo cavo AEBCDN, questi saranno nella ragione delle basi AC, ed ADEBC: sicchè dunque conoscendosi la ragione del rettangolo AC, allo spazio ADEBC, si può, con una regola del tre venire in cognizione del valore del solido parallelepipedo cavo ADEBCN, ritrovando un quarto proporzionale, dopo i due numeri costanti, che esprimono la ragione delle basi AC; ADEBC, e del parallelepipedo, nel quale vi sia cavata una simil figura; ed il detto quarto proporzionale sarà il solido ADEBCN.

AVVERTIMENTO I.

Per calcolare il solido di una volta a botte descritta da una simil figura, denominata alla Gotica; fà d' uopo prima ritrovare la ragione costante tra il rettangolo AC, e lo spa-

(a) *Prop. 32. lib. 11.*

spazio ADEBC, acciò trovandosi un quarto proporzionale, dopo la detta ragione, ed il parallelepipedo AQ, si avrà, coll' aggiunta del parallelepipedo DP, il solido di qualunque volta di simil natura.

Posto il diametro del cerchio 2000, sarà il raggio AB = 1000; e la circonferenza di esso 6282 (*a*); la sesta parte di essa, ch' è l'arco AE, sarà *1047*, la quale moltiplicata per la metà di AB, ch' è 500, il prodotto 523500, sarà il settore ABE (*b*), dal quale dedottone il triangolo AEB, essendo l' altezza EF = 866 parti di AB, resterà il segmento EB = 90500; aggiuntovi a questo, il detto settore, si avrà lo spazio totale AEB = 514000; ma il rettangolo AC = 866000; dunque il rettangolo AC, sta allo spazio AEB, come 866000, a 514000, ovvero come 866 : 514; oppure come 433, a 257, e convertendo si avrà, che il rettangolo AC, sta allo spazio ADEBC, come 433 : 176. Sicchè dunque ancora il parallelepipedo ADCBN, sta al solido parallelepido ADEBCN, come 433 : 176 (*c*).

AV-

(a) *Prop. 6. de circ. dim. Caravelli.*
(b) *Porp. 15. de circ. dim Caravelli.*
(c) *Corol. 4. Teor. 9.*

AVVERTIMENTO II.

Data una Volta Gotica, che cuopre un vuoto rettangolare, ed abbia la suttesa AB = 30, e sia il sesto EF = 26, per essere l'altezza del triangolo equilatero, e la lunghezza BN = 40, e la grossezza alla cima ER = $1\frac{1}{2}$; per trovar la sua solidità fa d'uopo prima calcolare il parallelepipedo ACQ, ch'è 31200; indi fare come 435, a 176, così 31200, al quarto proporzionale $12681\frac{3}{4}$, che sarà il solido ADEBCN, al quale aggiuntovi il parallelepipedo DQP, che ha per altezza la grossezza della cima, e la somma $14431\frac{3}{4}$, sarà il solido parallelepipedo cavo ADEBCN, valore della solidità della volta Gotica.

AVVERTIMENTO. III.

Tav. 1. Fig. 1. Essendosi nel Teorema I. dimostrato, che il rettangolo ABCD, sta al semicerchio AKB, come 14: 11; e nel Teorema IV, che il rettangolo ABFK, stia alla semiellissi ADB, *Tav. 1. Fig. 3. n. 1. 2.* come 14: 11. Si puole conoscere il giusto volore di una fabbrica di figura circolare, o Ellittica, e che abbia le due faccie parallele, come sarebbero le quinte, o siano tompagni delle descritte volte a botte; essendo data la suttesa, il sesto, e la grossezza della fabbrica; si avrà il suo valore, formando la seguente analogia, come 14, ad 11, così il rettangolo

lo fatto dalla suttesa, e dal sesto al quarto proporzionale, e questo moltiplicato per la grossezza, si avrà il prodotto, che sarà il valore della solidità di detta quinta o tompagno.

Se sia poi tompagno di volta Gotica, allora siccome si è detto nell' Avvertimento I. Corr. IX. il rettangalo ABCD, sta allo spazio totale AEB, come 433. 257; ed operando nel modo istesso che nel tompagno di Volta a botte circolare, o Ellitica, mutando solamente la ragione in quella di 433. 257, si avrà il suo giusto valore. *Tav. I. Fig. 7.*

CAP.

CAP. II.

Della superficie concava della Volta a botte.

DEFINIZIONI.

I. PEr superficie concava della Volta a botte s' intende la superficie del semicilindro, che forma la cavità di detta Volta.

II. Si dice superficie di Volta a botte di giusto sesto quella, la di cui curvità è il semicerchio AKB (*Fig.* 1.). Si dice Ellittica l'ADB (*Fig.* 3. *n.* 1. 2.); e Gotica finalmente AEB (*Fig.* 7.)

TEOREMA I.

Tav. 1. *Fig.* 1. Sia AD, un rettangolo circonscritto al semicerchio AKB. Dico, che la somma de' tre lati AC, CD, DB, sta al perimetro del semicerchio AKB, come 14: 11.

Secondo Archimede ha dimostrato ne' suoi Teoremi; il diametro del cerchio, sta alla sua circonferenza come 7 : 22; ma AC+CD+DB = 2 AB; ed essendo AB, secondo Archimede 7, sarà 2 AB = 14, e la semiperiferia AKB = 11. Dunque la somma di AC, CD, DB, starà alla semicirconferenza AKB, come 14: 11. Ciocchè dovcasi dimostrare.

AV-

AVVERTIMENTO I.

Da quel che si è dimostrato nel Teorema precedente, si rileva il metodo di avere il valore della superficie concava di una Volta a botte di giusto sesto, essendo cognita la suttesa, il sesto, e la lunghezza. Trovando un quarto proporzionale, dopo la ragion costante di 14 : 11, e la dupla suttesa, questo moltiplicandolo per la lunghezza, il prodotto sarà il valore della superficie.

Sia, per esempio, AB = 10, sarà OK = 5; e la lunghezza BE = 20; si formi la seguente analogia, come 14 ad 11, così 20 al quarto proporzionale, $15\frac{5}{7}$, il quale moltiplicandolo per la lunghezza BE, ch' è 20; il prodotto $314\frac{2}{7}$ sarà la superficie, che si va cercando.

AVVERTIMENTO II.

Se si andasse cercando la superficie della quinta AKB, di detta volta; in tal caso trovando un quarto proporzionale, dopo 14, 11, ed il rettangolo fatto dalla suttesa AB, per il sesto OK, si avrà il valore delle dette superficie (*a*).

AV-

(a) *Teo. 1. Cap. I.*

AVVERTIMENTO III.

Se il perimetro di detta volta, fosse una porzione minore del semicerchio, e si desiderasse il valore della superficie concava di essa, allora fa d'uopo trovare prima il perimetro della detta porzione, acciò moltiplicandolo ancora per la lunghezza di essa volta, si avrà la desiderata superficie.

Tav: I. Fig. 8. Col calcolo trigonometrico è facile trovare il valore del perimetro dell'arco ACB, essendo data la suttesa AB, ed il sesto CD; facendo prima, come CD : DB = DB : DE, e coll'aggiunta di CD, si avrà CE, diametro del cerchio del continuato arco ACB, ed essendo cognita nel triangolo rettangolo ADO, l'AD, metà della suttesa, e l'AO raggio, si verrà in cognizione dell'angolo AOC; e per conseguenza i gradi, che contiene l'arco AC, ovvero il suo duplo; ed indi formando la seguente analogia, come il numero 360, gradi di tutta la circonferenza, agli gradi, che contiene l'arco ACB, così la detta circonferenza (la quale sarà cognita, per essersi trovato il diametro) al quarto proporzionale, il quale sarà il valore del detto arco ACB, che moltiplicandolo per la lunghezza della Volta, si avrà il valore della superficie concava della detta volta a botte.

Per trovare poi la superficie del segmento ACB, che sarebbe il tompagno di detta Volta.

Dei

)evesi moltiplicare il detto arco ACB, per
ı metà del raggio CO, e si avrà il setto-
e AOB (*a*), dal qnale dedotto ne il triango-
lo AOB, avendo per base l'AB, suttesa, e
er altezza la OD, eccesso del raggio sopra il
esto ed il residuo sarà il segmento ACB.

AVVERTIMENTO. IV.

Posto il diametro AD = 1000; il lato *Tav.I. Fig.2.*
.B, del quadrato inscritto nel cerchio ABDE,
arà presso a poco 707; ma il diametro del
erchio, sta alla sua circonferenza come 1000:
141; siccome ha dimostrato saviamente il
elebre Matematico, signor *D. Vito Caravel-*
ne' Teoremi di Archimede; dunque il lato
el quadrato inscritto nel cerchio sta alla peri-
eria di esso, come 707: 3141; onde ancora
lato del quadrato inscritto nel cerchio, sta
l quadrante AB, come 707: 785. 25, ovve-
o come 70700: 78525, oppure come 2828:
141: sicchè dunque anche il perimetro del qua-
rato inscritto nel cerchio, sta alla circonfe-
enza del medesimo cerchio come 2828: 3141.

TEOREMA II.

Se nella Ellissi ADB, si tiri la tangente *Tav.II. Fig.11. n.1.2.*
N, la quale si vada ad unire coll' asse AB,
pro-

(*a*) *Prop. 5. de cir. dim. Caravelli.*

prolungato nel punto G, e dal punto del contatto N, si abbassi la perpendicolare NO, sopra l' asse AB; e sopra l' AB, come diametro si descriva il semicerchio ACB, e la sua circonferenza s' incontrerà con la perpendicolare ON, nel punto M. Dico che unendosi il punto G, col punto M, per mezzo della retta GM, questa sarà tangente del semicerchio ACB.

Dal punto M, al centro P, tirisi la retta MP. Per la proprietà della tangente nella Ellissi, si avrà, che il quadrato di AP, sia eguale al rettangolo di GP, in PO (*a*). Ma essendo PM = PA sarà il quadrato di PM, eguale al rettangolo di GP, in PO; e si avrà GP: PM = PM: PO; onde il triangolo GMP, è simile al triangolo MOP (*b*); e l' angolo GMP, come eguale all' angolo MOP, sarà retto; dunque la GM, sarà tangente nel semicerchio ACB (*c*). Ciocchè doveasi dimostrare.

COROLLARIO.

Sicchè dunque, se una tangente di un cerchio formato sopra l' asse maggiore, o asse minore di una Ellissi, si prolunghi fino ad incontrare il diametro disteso, e dal punto del con-

(a) *Corol.3 prop.4.tract.5.Sect.con.Joseph.Orlando*
(b) *Prop. 6. lib. 6.*
(c) *Prop. 18. lib. 3.*

contatto sopra il diametro si abbassi la perpendicolare, la quale interseca la linea Ellittica, se da questo punto d' intersezzione, al punto dell' incontro della tangente, e del diametro, si tiri una retta, questa sarà tangente della Ellissi.

AVVERTIMENTO.

Da ciò è facile risolvere il Problema di tirare una tangente nella Ellissi, da qualsivoglia punto, o nel perimetro, o fuori del perimetro. Descrivendo prima il semicerchio ACB (*n.* 1.) sopra l' asse maggiore AB, se il punto per lo quale si voglia tirare la tangente sia N, in tal caso da esso si abbassi la perpendicolare NO, e questa si prolunghi fino ad incontrare la semiperiferia nel punto M, per lo punto M, si tiri la retta MG, tangente nel semicerchio (*a*), la quale si unisca col diametro AB, nel punto G, e dal punto G, al punto N, si tiri la retta GN, questa sarà tangente nella Ellissi, la ragione è chiara per quello che si è dimostrato. E se il punto è dato al di fuori della Ellissi, e proprio nel prolungamento dell' asse maggiore AB, e sia G, per questo tirisi la GM, tangente del semicerchio nel punto M, dal quale si abbassi la perpendicolare MO, che interseca la

D li-

(a) *Prop. 16. lib. 3.*

linea Ellittica nel punto N, e tirandosi la GN, questa sarà tangente della Ellissi.

LEMMA,

Tav. I. Fig. 10. Sia MBFN, una Ellissi qualunque, e coll'asse maggiore MF, come diametro si descriva il cerchio MDFO, si tiri indi il diametro OD, ad angoli retti col diametro MF; si divida il quadrante DF, in due parti eguali nel punto L, e dal punto L, si abbassi la perpendicolare LH, che taglia la Ellissi nel punto I; per lo punto L, si tiri la retta EG, tangente del cerchio nel punto L, la quale si vada ad unire colli due descritti diametri prolungati ne' punti E, G. Si unisca indi il punto G, col punto I, per mezzo della retta GI, e si prolunghi finchè si unisca colla retta AE, nel punto C; sarà GC, tangente della Ellissi nel punto I (*a*), e finalmente dal punto F, alli punti D, B, si tirino le rette FD, FB. Dico, che la tangente GC, della Ellissi FBMN, sia parallela al lato BF, del rombo inscritto in essa.

Nel triangolo EGA, la retta HL, è parallela ad AE, ondè sarà EC : CA = LI : IH (*b*), e componendo EA : CA = LH : IH.

ma

(a) *Corol. Teor. 2. Cap. 2.*
(b) *Corol. 2. Teor. 4. lib. 6.*

ma LH : IH = DA : AB (*a*)
Dunque EA : CA = DA : AB ,
e permutando EA : DA = CA : AB ;
ma EA : DA = AG : AF (*b*)
Dunque CA : AB = AG : AF

Ma quando due lati di un triangolo sono divisi in parti proporzionali , le rette che uniscono i punti delle divisioni , sono parallele al terzo lato (*c*). Dunque la retta BF , sarà parallela alla tangente GC. Ciocchè doveasi dimostrare.

COROLLARIO.

Essendo GE, parallela ad FD , si avrà che
AG : GE = AF : FD (*d*)
e permutando AG : AF = GE : FD
Inoltre essendosi dimostrata FB , parallela a GC ; si avrà ancora , che
AG : GC = AF : FB
e permutando AG : AF = GC : FB ;
Ma AG : AF = GE : FD.
Dunque GE : FD = GC : FB ,
e permutando GE : GC = FD : FB ;
Ma GE : GC = GL : GI (*e*).

(a) *Corol. 1. Teor 3. Cap. 1.*
(b) *Prop. 2. lib. 6.*
(c) *Prop. 2. lib. 6.*
(d) *Prop. 4. lib. 6.*
(e) *Corol. 2. prop 2. lib 6.*

Dunque FD : FB = GL : GI

Che perciò le tangenti GL, GI, tirate nelli semiquadranti del cerchio FDMO, e della Ellissi FBMN, sono come FD, lato del quadrato inscritto nel cerchio, ad FB, lato del rombo inscritto nella Ellissi.

TEOREMA III.

Tav. II. Fig. 11. n. 1.

Il perimetro di qualunque Ellissi, sta alla periferia del cerchio, il di cui diametro è l'asse maggiore, o minore della detta Ellissi, come il lato del rombo inscritto nella Ellissi, al lato del quadrato inscritto nel cerchio.

Sia ADB, una semiellissi, ed ACB, semicerchio, il diametro AB, del quale sia asse maggiore, o minore della detta semiellissi; dal centro P, s'innalzi ad angoli retti la PC, e si prolunghi fintantocchè giunga a dividere in quadranti la semiellissi, ed il semicerchio, ne punti D, e C; si uniscano i punti A, e C; A, e D per mezzo delle rette AC, AD, sarà AC, lato del quadrato inscritto nel cerchio, ed AD, lato del rombo inscritto nella Ellissi. Dico, che il perimetro della Ellissi ADB, stia alla periferia del cerchio ACB come AD, ad AC.

Si divida il quadrante AC, in due parti egua-

eguali nel punto M (*a*), e dal punto M, si abbassi la perpendicolare MO, che taglia il quadrante Ellittico nel punto N, per lo punto M, tirisi la retta MG, tangente del circolo nel punto M (*b*), la quale si prolunghi finchè si unisca col diametro AB, prolungato nel punto G; dal punto G, al punto N, tirisi la retta GN, la quale sarà tangente nella Ellissi nel punto N (*c*). Si concepisca la *mo*, infinitamente vicina alla MO, e parallela; gli archetti Mm, Nn confondendosi colle porzioni delle tangenti, si potranno pigliare come linecte: onde si avrà, che l'archetto Mm, stia all'archetto Nn, come MG: NG (*d*); ma MG : NG = AC : AD, per lo Corollario del Lemma precedente. Dunque l'archetto Mm, sta all'archetto Nn, come AC : AD. Inoltre essendo l'archetto Nn, il medio del quadrante Ellittico AD, ed essendo la parte ND, meno curva della parte NA; perciò concependosi diviso tutto il quadrante circolare AMC, nelle parti tutte eguali ad Mm, e per li punti delle divisioni si concepiscano tirate altrettante rette parallele a CP, queste divideranno il quadrante Ellittico AMP, in ugual numero di parti, e

(a) *Prop.* 30. *lib.* 3.
(b) *Corol.* 2. *prop.* 16. *lib.* 3.
(c) *Corol. Teor.* 2. *Cap* 2.
(d) *Corol.* 1. *prop.* 2. *lib.* 6.

saranno gli archetti nella parte meno curva ND, maggiori degli archetti nella parte NA; poichè i gradi nella parte meno curva della Ellissi, sono maggiori degli gradi nella parte più curva, siccome molti Autori han dimostrato, e dottamente il celebre Matematico P. D. Gio: Maria della Torre nella sua Fisica Italiana stampata in Napoli nel 1748. Part. II. Cap. I. §. 11. E siccome il quadrante Ellittico AND, è una curva continuata, ed essendo la parte nel punto N, più curva di quella nel punto D, così gli archetti nella parte ND, si faranno maggiori quanto più sono distanti dal punto N; e l' ultimo archetto accosto al punto D, sarà il massimo relativamente all' archetto Nn, e si farà eguale al suo corrispondente nel cerchio; ed essendo la parte nel punto A, più curva di quella nel punto N, l' archetto accosto al punto A, sarà il minimo relativamente all' archetto Nn, ed essendo di egual numero le divisioni tanto nell' arco ND, quanto nell' arco NA, e gli archetti progressivamente dal punto N, verso D, si fanno maggiori di Nn, nel tempo medesimo, che gli altri nell' arco NA, si fanno minori andando da N, in A; sicchè dunque l' ultimo archetto accosto al punto A, sarà tanto minore dello archetto Nn, quanto l' ultimo archetto accosto al punto D, sarà maggiore dello stesso archetto Nn. Essendo gli archetti corrispondenti nel quadrante circolare AC,

AC, tutti eguali tra loro; le ragioni degli archetti nella porzione MC, agli archetti nella porzione DN, saranno tanto minori della ragione di Mn: Nn, quanto le ragioni degli archetti nella porzione MA, agli archetti nella porzione NA, saranno maggiori della stessa ragione di Mm: Nn; onde componendo, e compensando il difetto delle prime, coll' eccesso delle seconde, si avrà che la somma degli archetti nel quadrante circolare AC, alla somma degli archetti nel quadrante Ellittico AD, starà come Mm: Nn, ovvero come AC: AD. Sicchè dunque la periferia del cerchio ACB, sta al perimetro della Ellissi ADB, essendo quadrupli de' quadranti, anche nella ragione di AC: AD. Ciocchè doveasi dimostrare.

COROLLARIO I.

Essendo AC, la quarta parte del perimetro del quadrato inscritto nel cerchio, il di cui diametro è AB, ed AD, quarta parte del perimetro del rombo inscritto nella Ellissi; onde la periferia del cerchio, il diametro del quale è uno degli assi conjugati, sta al perimetro della Ellissi, come il perimetro del quadrato inscritto nel cerchio, al perimetro del rombo inscritto nella Ellssi.

COROLLARIO II.

Essendosi dimostrato, che il perimetro di un cerchio, che ha per diametro uno degli assi conjugati di una Ellissi, sta al perimetro della stessa Ellissi, come il lato del quadrato inscritto nel cerchio, al lato del rombo inscritto nella Ellissi, permutando, ed invertendo il lato del quadrato, starà alla periferia del cerchio, come il lato del rombo, al perimetro della Ellissi; ovvero il perimetro del quadrato, starà alla periferia, come il perimetro del rombo, al perimetro della Ellissi: ma il perimetro del quadrato, sta alla periferia del cerchio, come 2828 : 3141 (*a*); dunque ancora il perimetro del rombo inscritto in una Ellissi, sta al perimetro della Ellissi come 2828 : 3141.

COROLLARIO III.

Il perimetro di qualunque Ellissi, stando al perimetro del rombo inscritto in essa, come 3141 : 2828. Sicchè dunque i perimetri delle Ellissi, sono tra loro, come i perimetri de' rombi inscritti in esse, ovvero come i lati di detti rombi.

CO-

(a) *Avvert. 4. Teor 1. Cap 2.*

COROLLARIO IV.

Stando il perimetro di ogni Ellissi, al perimetro del rombo inscritto in essa, come 3141 : 2828, si avrà, che nella stessa ragione sarà il semiperimetro di una Ellissi, al semiperimetro del rombo inscritto in essa; e del quadrante, al lato del rombo. Sicchè dunque i perimetri di due Ellissi, sono tra loro come i perimetri de' rombi inscritti in esse, ovvero come i lati de' stessi rombi.

COROLLARIO V.

Siano le due Ellissi ABCD, abcd, simili tra loro gli assi conjugati delle quali siano AC, BD, ac, bd; si uniscano i punti A, B; a, b, per mezzo delle rette AB, ab: essendo simili le due Ellissi si avrà; che AO: OB = ao : ob (*a*), ed essendo gli angoli AOB, aob, eguali perchè retti, perciò i due triangoli AOB, aob, saranno simili (*b*); onde si avrà, che AB : AO = ab : ao, e permutando AB : ab = AO : ao; ma AB : ab, come il perimetro della Ellissi ABCD, al perimetro della Ellissi abcd; dunque AO : ao, ovvero AC : ac, come il pe-

Tav. IV. Fig. 37.

(a) *Avvert. 1. Teor. 4. Cap. 1.*
(b) *Prop. 6. lib. 6.*

perimetro della Ellissi ABCD, al perimetro della Ellissi abcd: sicchè dunque i perimetri di due ellissi simili, sono tra loro come gli assi maggiori, ovvero come gli assi minori, essendo questi proporzionali con quelli.

COROLLARIO VI.

Nelle due ellissi simili ABCD, abcd, i due triangoli AOB, aob, siccome si è dimostrato, sono simili, e perciò starà

AO: OB = ao: ob

Componendo AO + OB: OB = ao + ob: ob

e permutando AO + OB: ao + ob = OB: ob;

ma OB: ob = AB: ab, essendo simili i due triangoli; dunque

AO + OB: ao + ob = AB: ob;

ma AB, sta ad ab, come il perimetro della ellissi ABCD, al perimetro della ellissi abcd: sicchè dunque i perimetri dell' ellissi simili, sono ancora tra di loro, come la somma degli semiassi conjugati, ovvero come la somma degli assi conjugati.

AVVERTIMENTO.

Dovendosi calcolare una superficie di una Volta a botte ellittica, essendo cognita la suttesa, il sesto, e la lunghezza; si deve prima estrarre la radice dalla somma de' quadrati della metà della suttesa, e dell' intiero sesto

sto, indi trovando un quarto proporzionale
)po i due numeri costanti 2828, 3141, e
dupla radice, si avrà il perimetro della
rvità di detta volta, il quale moltiplican-
)lo per la lunghezza, il prodotto sarà la su-
:rficie di di detta volta.

Sia per esempio AB = 20; il festo DD = $\frac{1}{2}$; e la lunghezza sia 30. L'AP, metà *Tav. II Fig. 11.*
:lla suttesa sarà 10; onde AD, radice del-
somma de' quadrati fatti sopra AP, PD,
rà $12\frac{1}{2}$. Indi dopo i due numeri costanti
328, 3141, e la dupla radice che è 25, si
)vi il quarto proporzionale $27\frac{2169}{2828}$, e que-
o sarà il perimetro della semiellissi ADB,
ie moltiplicandolo per la lunghezza 30, il
:odotto $833\frac{13}{1414}$ sarà la superficie di detta
)lta.

Per liberare un tal calcolo dall' estrazzioni
radice, è necessario prender la misura della
ittesa della metà della volta, la quale sarebbe
D, e di tal modo si verrebbe ad abbreviare
operazione; trovando un quarto proporzio-
ale dopo i due numeri costanti 2828, 3141,
la dupla suttesa, e questo sarà il perime-
ietro, il quale moltiplicandolo per la lun-
hezza, si avrà la superficie.

TEO-

TEOREMA IV.

Tav. I. Fig. 7. Sia il rettangolo ABCD, circonscritto all' arco Gotico AEB. Dico, che la somma degli tre lati AD, DC, CB, stia al perimetro curvo AEB, come 1366 : 1047. Si tirino le due rette EA, EB, sarà AEB, un triangolo equilatero (*a*), e perciò l' arco AE, sarà di gradi 60. Onde posto il diametro 1000, la circoferenza sarà 3141 (*b*), ed essendo l' arco AE, sesta parte della circonferenza, sarà 523. 5; ed il suo duplo, 1047, sarà la somma degli due archi AE, EB. Ciò posto, essendo AB, raggio del cerchio, la sesta parte della circonferenza del quale è AE; perciò sarà AB, che è eguale a DC = 500, e la EF, come perpendicolare del triangolo equilatero, sarà 433; onde la somma di AD, DC, CB; cioè di AB, e del doppio sesto EF, sarà 1366: ma il perimetro AEB, è uguale a 1047.; dunque la somma de' tre lati AD, DC, CB, sta al perimetro AEB, come 1366: 1047. Ciocchè doveasi dimostrare.

AV-

(a) *Teor. 9. Cap. 1.*
(b) *Prop. 6. de circ. dim. Caravelli.*

AVVERTIMENTO.

Dovendosi misurare la superficie di una olta a botte di figura Gotica, essendo cognita suttesa, il sesto, e la lunghezza; basta ritrovare un quarto proporzionale dopo i due umeri costanti 1366, 1047, e la somma ella suttesa col duplo sesto, e questo molplicarlo per la lunghezza, ed il prodotto sarà la superficie, che si va cercando.

Sia, per esempio, la suttesa AB = 30; il esto FE, sarà 26; e la lunghezza BN = 0; la somma degli tre lati AD, DC, CB, uguale 82: onde facendo, come 1366, a 047, così 82, a $72\frac{581}{685}$, il quale moltiplicato per la lunghezza 40, il prodotto 2514 $\frac{18}{83}$ sarà la superficie della Volta Gotica che i andava cercando.

CAP.

CAP. III.

Delle varie specie de' Poliedri, e delle principali loro affezioni.

DEFINIZIONI.

Tav. II. Fig. 12. I. SE attorno alla base circolare ABCD, dell' Emisfero BID, vi si circonscrive un poligono qualunque EHGF, e si concepiscano le tangenti EH, HG, GF, FE, sollevate dalla loro situazione, radendo la superficie dell' emisfero, fintantocchè giungono nel medesimo tempo nel punto I, vertice di esso Emisfero. Il solido EHGFI, descritto da moti di dette tangenti, si chiamerà in appresso *Semipoliedro*.

II. Si denominerà *Semipoliedro esterno*, allora, quando la base di esso è un poligono circonscritto alla base dell' Emisfero.

III. Si dice all' opposto *Semipoliedro interno*, allora quando la sua base è inscritta alla base dell' Emisfero; e la sua generazione si è, che siccome nel semipoliedro esterno, il moto de' suoi lati si fa sempre tangente all' Emisfero; nello interno all' incontro, il moto de' lati si fa sempre parallelo, e gli estremi di essi devono toccare la superficie interna dell' Emisfero. Se s' intende fatto il medesimo nell' altra metà della sfera, tutto il solido si dirà *Poliedro*. IV.

IV. Se nel circolo AFBH, s'intende in- *Tav. II. Fig. 15. n. 1.*
scritto il poligono AEFBGH, e sopra le dia-
gonali AB, HF, EG, s'intendono ad ango-
li retti elevate le semiellissi AIB, HIF,
EIG, le quali s'intersecano nel punto I, gli
assi maggiori siano AB, HF, EG; e con
noti eguali, e paralleli, i lati AE, EF,
FB, si concepiscano scorrere per gli archi
Ellittici AI, EI, FI, il solido, la di cui
superficie è generata da detti moti, facendo
il medesimo dall'altra parte, si dirà *Poliedro Ellittico.*

V. La retta, che unisce il punto I, col centro K, si dirà *raggio del Poliedro*, la IL, che unisce l'altro punto del poliedro, si chiamerà *asse*; il punto I, *vertice*; e la base EFBGHA, *sezione massima.*

TEOREMA I.

Se il mezzo poliedro, si divide per un piano parallelo alla sezione massima. La sezione sarà una figura simile alla massima.

Sia I divida il semipoliedro EFGHI, per il *Tav. II Fig. 12.*
piano LMNO, parallelo alla sezione mas-
sima; EFGH. Dico, che la figura LMNO,
sia simile ad EFGH.

Per i punti P, ed S, si tirino le rette
PQ, SQ, parallele alle rette BK, CK. Per

la

la natura di detto solido, la figura LMNO, sarà circonscritta al cerchio PR; e gli archi BPI, CSI, i quali passano per i punti del contatto de' lati, che terminano le figure, saranno quadranti; e per tanto gli archi BC, PS, che sono framezzati a detti quadranti, saranno simili tra di loro, e perciò sarà l' angolo BKC, eguale all' angolo PQS. Ma nelli quadrilinei BKCH, PQSO, gli angoli dell' uno, sono eguali agli angoli dell' altro, e gli angoli nelli contatti sono eguali per esser retti; dunque sarà l' angolo BHC, della figura EFGH, eguale all' angolo POS, della figura LMNO, della stessa maniera si dimostra di tutti gli altri; onde la figura LMNO, sarà equiangola colla figura EFGH. Ciò posto, tirandosi le due OQ, HK, queste divideranno gli angoli, tanto alli centri, quanto gli angoli POS, BHC, in due parti eguali (*a*) Onde i due triangoli OPQ, HBK, saranno equiangoli, e perciò

OP : PQ = HB : BK (*b*),

e permutando OP : HB = PQ : BK ;

Ma essendo i due triangoli QPL, BKE, equiangoli, sarà PQ : BK = PL : BE ;

Dunque OP : HB = PL : BE,

e permutando OL : PL = HE : BE,

e componendo OL : PL = HE : BE

e per

(a) *Corol. prop. 13. lib. 4.*
(b) *Prop. 4. lib. 6.*

e permutando OL : HE ⊐ PL : BE ,
ovvero come PQ : BK.
Della stessa maniera si dimostra , che LM, sta ad EF , come il raggio PQ , al raggio BK;
Dunque OL : HE ⊐ LM : EF ,
e permutando OL : LM ⊐ HE : EF ;
E perciò le due figure HEFG , OLMN , saranno simili tra di loro (*a*). Ciocchè bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

Essendosi dimostrato , che ciascuno de' lati della figura LMNO , stia a ciascuno de' lati della figura EFGH , come PQ : BK ; Onde la somma di tutti gli antecedenti LM , MN , NO , OL , cioè il perimetro della sezione LMNO, starà alla somma di tutti gli consequenti EF, FG GH, HE, cioè al perimetro della sezione EFGH, anche come PQ: BK (*b*). Laonde dunque gli perimetri delle sezioni , sono come gli raggi de cerchi inscritti a dette sezioni.

COROLLARIO II.

La sezione LMNO, siccome si è dimostrato è simile alla massima EFGH ; Onde

LMNO

(a) *Def.* 1. *lib.* 6.
(b) *Prop.* 12. *lib.* 5.

LMNO : EFGH = OL^2 : HE^2 (*a*)

ovvero come PQ^2 : BK^2.

Ma PQ^2 : BK^2, come il cerchio BADC al cerchio PSR (*b*); Dunque le sezioni de poliedri, sono come gli circoli inscritti i esse.

LEMMA.

(Tav. I. Fig. 13.)

Sia AmK, un triangolo rettangolo nel punt m, dal quale si abbassi la mn, perpendicolar alla ipotenusa AK, e si tiri la PQ, paralle la ad mn; Dico, che Km : mn = Pm : Qn

Essendo gli due triangoli Amn, mKn, s mili tra loro, per essere ciascuno di essi s mile col totale, perciò si averà.

Am : An = mK : mn;

ma Am : An = Pm : Qn (*c*);

Dunque Km : mn = Pm : Qn.

Ciocchè doveasi dimostrare.

TEO

(a) *Prop.* 20. *lib.* 6.
(b) *Prop.* 2. *lib.* 12.
(c) *Corol.* 1. *prop.* 2. *lib.* 6.

TEOREMA II.

La superficie del semipoliedro è uguale alla superficie del prisma, che ha la stessa base e la medesima altezza col semipoliedro.

(Tav. II. Fig. 12).

Sia EFGHI, il semipoliedro. Dico, che la sua superficie sia eguale a quella del prisma che ha per base EFGH, e per altezza KI.

Si concepisca una sezione, la quale passi per mn, e sia parallela, ed infinitamente vicina alla LMNO, la quale sarà parallela alla base EFGH; essendo le due sezioni infinitamente vicine, l'archetto mP, si confonderà colla tangente nel punto M, tirata; e perciò mP, si potrà prendere per una retta. Ciò posto, formando l'archetto mP, una corona nel poliedro, la sua superficie si averà moltiplicando l'archetto mP, per la somma dimezzata delli perimetri delle due sezioni mn, PQ; ma essendo le dette due sezioni infinitamente vicine, la somma dimezzata dei perimetri di esse, non differisce da quella della sezione mn; Onde il valore di detta corona si averà moltiplicando l'archetto mP, per il perimetro della sezione mn. Inoltre, per lo lemma precedente, tirando la Km, si averà che Km, ovvero KB, che gli è uguale, co-

me raggi del quadrante, sta ad mn, come mP, a Qn; ma KB, sta ad mn, come il perimetro EFGH, al perimetro della sezione mn (*a*); dunque il perimetro EFGH sta al perimetro della sezione mn, come mP a Qn; e pertanto il prodotto del perimetro della sezione mn, per l'archetto mP, sarà eguale al prodotto del perimetro della base EFGH, per Qn (*b*); Ma siccome si è detto, che il prodotto del perimetro della sezione mn, per l'archetto mP, sia eguale alla corona del semipoliedro tramezzata alle due sezioni infinitamente vicine, questo avendo luogo da per tutto; sicchè se si concepisce il semipoliedro diviso in queste corone infinitamente picciole, dovendo essere la somma di tutte queste corone eguale alla superficie del semipoliedro; perciò il prodotto del perimetro della base EFGH, per la somma delle porzioni di IK, eguali a Qn, e corrispondenti agli enunciati archetti, sarà eguale alla superficie del semipoliedro; ma il prodotto del perimetro della base EFGH, per l'altezza I è la superficie del prisma, che ha per base la figura EFGH, e per altezza la IK; base ed altezza del semipoliedro. Sicchè dunque la superficie del semipoliedro è eguale a quo

(a) *Corol.* 1. *Teor.* 1. *Cap.* 3.
(b) *Prop.* 16. *lib.* 6.

la del prisma, che ha la stessa base, e la medesima altezza. Ciocchè doveasi dimostrare,

COROLLARIO I.

Quel che si è dimostrato del semipoliedro ha luogo ancora nel poliedro totale, essendo questo duplo di quello. E perciò la superficie del poliedro è eguale a quella del prisma, la di cui base è la sezione massima, e l'altezza l'asse del poliedro.

COROLLARIO II.

Col medesimo raziocinio usato nel Teorema precedente, si dimostra, che la superficie di una porzione di poliedro LMNOI, è eguale alla superficie del prisma, che ha per base la sezione massima EFGH, e per l'altezza IQ. Sicchè la superficie del semipoliedro, sta alla superficie della porzione LMNOI, come la superficie del prisma, che ha per base la sezione massima, e per altezza il raggio, alla superficie del prisma, che ha la medesima base, e per altezza la IQ, altezza del segmento, ovvero come il raggio IK, alla porzione dell'asse IQ.

COROLLARIO III.

Sicchè dunque un poliedro totale dividen-

dosi per piani paralleli alla sezione massima, le superficie de'segmenti saranno tra loro nella ragione delle porzioni dell'asse corrispondenti a dette sezioni; E col totale, sono come le rispettive porzioni dall'asse, allo intero asse.

COROLLARIO IV.

La sezione massima EFGH, sta alla superficie del prisma, che ha per base la EG, e per altezza la IK, che è eguale a BK, come la IK, alla mettà di IK; poichè la superficie della sezione massima EG, si ha moltiplicando il perimetro EFGH, per la mettà di BK, ovvero per la mettà di IK; e la superficie del prisma si ha moltiplicando l'istesso perimetro EFGH, per la IK; ma la superficie del prisma è eguale alla superficie del semipolietro. Sicchè dunque la sezione massima EFGH, sta alla superficie del semipoliedro, come la mettà di IK, ad IK, ovvero come 1 : 2. Che perciò la superficie del semipoliedro è dupla della sua base, e la superficie totale del poliedro è quadrupla della sezione massima.

AVVERTIMENTO.

Essendo la superficie del poliedro eguale alla superficie del prisma, che ha per base l

sezione massima, e per altezza l'asse del poliedro, ed essendo questa eguale ad un rettangolo, che ha per base il perimetro della sezione massima, e per altezza, l'altezza del prisma, o sia l'asse; così tutte le proprietà, che ai rettangoli si sono dimostrate, alle superficie de' poliedri anche competono. Ed infatti se due poliedri hanno gli perimetri delle sezioni massime eguali, e gli assi eguali, le superficie saranno eguali; ed al contrario saranno in ragion de' perimetri delle sezioni massime, se gli assi sono eguali; ed in ragion degli assi, se li perimetti sono eguali. Come ancora se sono gli uni, e gli altri disuguali, saranno in ragion composta de' perimetri delle sezioni massime, e degli assi. E finalmente saranno di superficie eguali, se gli detti perimetri sono nella reciproca ragione degli assi. E si diranno di superficie simili, allorchè gli assi sono proporzionali alli perimetri delle sezioni massime simili.

TEOREMA III.

Il prisma, che ha per base la sezione massima di un semipoliedro, e per altezza il raggio di esso, sta al semipoliedro nella ragione di 3 : 2.

(Tav. II. fig 12.)

Sia EFGHI, un semipoliedro. Dico, ch il prisma, che ha per base la sezione mas sima EFGH, e per altezza la KI, sta al se mipoliedro EFGHI; Come 3 : 2.

Si concepisca la superficie de semipoliedr EFGHI, divisa in un numero infinito di co rone, mercè le sezioni parallele a quella ma sima, e queste corone s' intendano per alt piani verticali divise in un altro numero in finito. E dal centro K, agli angoli di ques infiniti piani concepiscansi tirate rette, ques divideranno il semipoliedro in tante piram di, quant' è 'l numero de' piani, nel quale diviso il semipoliedro; e come queste ha no la medesima altezza, che è il ragg IK, così la somma di esse si averà mo tiplicando la somma delle basi, che fo mano la superficie del semipoliedro, per terza parte di IK, ovvero multiplicando la d pla sezione massima EFGH (*a*), per $\frac{1}{3}$ BI

(2) *Corott.* 4, *Teor.* 2. *Cap.* 3.

ma la piramide, che ha per base la sezione massima EFGH, e per altezza la KI, si ha con moltiplicare la sezione massima EFGH, per la terza parte di IK, ovvero BK; e la somma di dette piramidi formano il semipoliedro. Dunque il semipoliedro EFGHI, sta alla piramide, che ha per base la sezione massima EFGH, e per altezza la IK, come 2: 1; ma il prisma, e la piramide, che hanno la stessa base, e la medesima altezza sono nella ragione di 3 : 1. (*a*); Dunque *ex æquo*, il prisma, che ha per base la sezione massima di un semipoliedro, sta al semipoliedro nella ragione di 3: 2. Ciocchè bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

Essendosi dimostrato, che la solidità del prisma, che ha per base la sezione massima del semipoliedro, e per altezza il raggio, stia al semipoliedro, come 3: 2. Onde convertendo, il prisma sudetto, starà allo stesso prisma semipoliedro cavo, come 3: 1.

COROLLARIO II.

Da quelche si è dimostrato nel Teorema precedente, egli è facile ad avere il valore di

(a) *Prop.* 7. *lib* 12

di un segmento di polliedro la di cui sezione sia LMNO, parallela alla sezione massima EFGH, moltiplicando la superficie di esso segmento (la quale si averà moltiplicando il perimetro della sezione massima EFGH, per IQ), per la terza parte del raggio IK, ed il prodotto sarà il settore del poliedro, dal quale dedottane la piramide, che ha per base la sezione LMNO, e per altezza la QK, ed il residuo sarà il valore della solidità del segmento LMNOI.

COROLLARIO III.

Essendo il prisma, la di cui base è EFGH, e l'altezza IK, al semipoliedro EFGHI, come 3 : 2; ed il detto prisma, al cilindro, che ha per base il cerchio BADC, e la stessa altezza IK, come la base EFGH, al cerchio BADC (*a*), ed il cilindro, che ha per base il cerchio BD, sta allo Emisfero, come 3: 2. (*b*); Dunque *ex æquo* il semipoliedro EFGHI, sta all'Emisfero BADCI, come la base EFGH, al cerchio BADC, ovvero come il perimetro dell'uno, alla periseria dell'altro.

CO-

(a) *Prop. 69. de Sphæ. et Cyl. Caravelli.*
(b) *Corol. prop. 68. de Sphæ. et Cyl. Caravelli.*

COROLLARIO IV.

Il valore del settore poliedrico LMNOK, si ha moltiplicando la superficie del segmento LMNOI, per la terza parte di IK; ed il valore dal settore sferico, il di cui segmento è tagliato dal piano LMNO, si ha con moltiplicare la superficie del segmento sferico per $\frac{1}{3}$ IK (a). Onde il settore poliedrico, sta al settore sferico nella ragione delle superficie de' segmenti; Ma le superficie dei segmenti sono, come la figura EFGH, al circolo BADC (*b*), e la figura EFGH, sta al cerchio BADC, come la sezione LMNO, al cerchio PSR, inscritto in essa (*c*); Dunque il settore poliedrico LMNOK, sta al settore sferico PSRK, come la sezione LMNO, al cerchio inscritto in essa.

COROLLARIO V.

La piramide LMNOK, sta al cono PSRK come la sezione LNNO, al cerchio PSR; Onde il settore poliedrico LMNOK, sta al settore sferico PSRK, come la piramide LMNOK; al cono PSRK; e convertendo il

(a) *Prop.* 58. *de Sphae., et Cyl. Caravelli.*
(b) *Corol.* 2. *Teor.* 2. *Cap.* 3.
(c) *Corol.* 2. *Teor.* 1. *Cap.* 3.

il settore poliedrico, sta al settore sferico, come il segmento poliedrico LMNOI, al segmento sferico PSRI; Ma gli detti settori sono come la sezione LMNO, al circolo PSR; Dunque, il segmento poliedrico LMNOI, sta al segmenro sferico PSRI, come la sezione LMNO, al cerchio PSR; ovvero come le di loro sezioni.

Essendosi dimostrato, che tanto gli segmenti, quanto gli settori sono nella ragione delle sezioni, ma la sezione LMNO, sta al cerchio PSR, come la sezione massima FFGH, al cerchio BADC (*a*); e la sezione massima, sta al cerchio inscritto in essa, come il semipoliedro, all' Emisfero. Dunque tanto gli segmenti, quanto gli settori, sono proporzionali col semipoliedro, e coll' Emisfero.

AVVERTIMENTO I.

Quel che si è dimostrato del rapporto del semipoliedro, all' Emisfero, e delle proprietà di esso, con gli prismi, che hanno la medesima base, e la stessa altezza; ha luogo ancora con gli totali poliedri, e sfere essendo dupli di essi

AV-

(*a*) *Corol.* 2. *Teor.* 1. *Cap.* 3.

AVVERTIMENTO II.

Essendosi fatto vedere, che il prisma avendo la medesima base, e la stessa altezza col poliedro, il prisma, sta al poliedro, come 3: 2. Onde due poliedri saranno eguali, quante volte le basi, e le altezze sono eguali. E se le basi sono eguali, siccome gli prismi sono nella ragione delle altezze, in questa stessa ragione saranno gli poliedri; e se al contrario le altezze sono eguali, saranno nella ragione delle basi; e se l'une e le altre sono ineguali, saranno gli detti poliedri nella ragion composta delle basi, ed altezze. E saranno eguali due poliedri, se le basi sono reciproche colle altezze; e simili si diranno quando le basi sono simili, e sono proporzionali colle altezze, e perciò due poliedri simili saranno nelle triplicata ragione de' loro lati omologi.

AVVERTIMENTO III.

Nel Teorema II di questo Capitolo si è dimostrato, che la superficie del semipoliedro esterno, sia eguale alla superficie di un prisma, che ha la medesima base, e la stessa altezza. Onde per avere la sua superficie, basta sapere quella del prisma, la quale si ha moltiplicando il perimetro della sezione massima

sima per l' altezza. Per aver poi la superficie di un semipoliedro tronco, ovvero di una porzione di esso, basterà moltiplicare il perimetro della sezione massima, per l'altezza corrispondente alla porzione.

TEOREMA IV.

Se il semipoliedro interno è diviso da un piano parallelo alla base, la sezione sarà una figura simile alla sezione massima.
(Tav. II. fig. 14.)

Sia il semipoliedro AEDFGI, generato al di dentro dell'Emisfero AIB, il quale sia diviso dal piano abcd. Dico, che la detta sezione sia simile alla massima CEFG.

Si tirino le rette ha, hb, HC, HE. Per la natura del detto solido, la figura abcd, sarà inscritta nel cerchio, corrispondente alla sezione dell'Emisfero, e comecchè CaI, EbI, DcI sono quadranti, ed intersecano gli cerchi nell'emisfero paralleli al cerchio massimo, quali cerchi essendo simili tra loro gli archi CE, ED, ab, bc, saranno simili ancora tra loro; perciò gli angoli, che si formano ne' loro respettivi centri dovendo essere eguali, saranno gli angoli della figura abcd, parimenti eguali agli angoli della figura CEDFG. Onde le dette figure saranno equiangole tra di loro. Ciò posto, essendo le due rette ah, bh,

bh, parallele alle due CH, EH, sarà l'angolo ahb, eguale all' angolo CHE (*a*), ed essendo tanto le due rette ah, bh, quanto le due CH, EH, eguali come raggi; perciò li due triangoli ahb, CHE, saranno equiangoli tra loro (*b*); e pertanto si averà, che

ab : bh = CE : EH,

e permutando ab : CE = bh : EH.

Così ancora negli altri due triangoli bhc, EHD, si averà bh : EH = bc : ED;

Dunque ab : ab : CE = ED;

e permutando ab : bc = CE : ED

Della stessa maniera si può dimostrare di tutti gli altri lati; onde la figura abcd, è simile alla figura EDFG (*c*). Ciocchè bisognava dimostrare.

AVVERTIMENTO.

Si puole dedurre ancora da questo Teorema, quel tanto si è dimostrato nel I. e II. Corollario del Teor. I., di questo Capitolo cio I. che gli perimetri delle sezioni sono, come gli raggi de' cerchi circonscritti a dette sezioni. II., che le sezioni de' poliedri interni, sono come gli cerchi circonscritti a dette sezioni.

TEO-

(a) *Prop.* 10 *lib.* 11.
(b) *Prop.* 6. *lib.* 6.
(c) *Def.* 1. *lib.* 6.

TEOREMA V.

La superficie del semipoliedro interno è eguale alla superficie del prisma, che ha la stessa base, e la medesima altezza.

(Tav. II, fig. 14)

Sia il semipoliedro interno CEDFGI. Dico, che la sua superficie sia eguale a quella del prisma, che ha la medesima base CEDFG, e la stessa altezza HI.

Si concepisca la stessa preparazione fatta nel Teorema II. Si averà ancora, che bH, ovvero EH : bh = mb : hn (*a*); Ma EH, sta a bh, come il perimetro EDFG, al perimetro abcd (*b*); Dunque il perimetro EDFG sta al perimetro abcd, come mb, ad hn; e perciò il prodotto del perimetro EDFG per hn, sarà eguale al prodotto del perimetro abcd, per l' archetto bm (*c*) : ma questo, siccome si è detto nel citato Teorema II. di questo Capitolo, è eguale alla corona del poliedro, la di cui grossezza è l' arco mb, infinitamente picciolo, ed ha luogo in tutte le infinite corone, se in un tal numero si suppone diviso il semipoliedro. Dunque la somma di tut-

(a) *Lem. Teor* 2. *Cap.* 3.
(b) *Avvert. precedente.*
(c) *Prop.* 16. *lib.* 6.

tutte queste corone, che è l'intera superficie del semipoliedro ABI, sarà eguale al prodotto del perimetro EDF^{G}, per la somma delle porzioni in IH, corrispondenti alli archetti; ma questo prodotto è lo stesso, che la superficie del prisma, la base del quale è la sezione massima EDF, e l'altezza HI. Dunque la superficie del semipoliedro interno è eguale alla superficie del prisma, che ha la medesima base, e la stessa altezza. Ciocchè doveasi dimostrare.

AVVERTIMENTO.

Da questo Teorema diggià dimostrato, se ne deducono tre conseguenze dimostrate, nelli Corollarj del Teorema 2.° di questo Capitolo. Ed infatti se si voglia riflettere su del dimostrato Teorema si conoscerà 1.° che anche la superficie del prisma, che ha per altezza l'asse del poliedro, e per base la sezione massima, sia eguale alla superficie del poliedro totale. 2.° che la superficie della porzione abcdl, sia eguale a quella del prisma, che ha per base la sezione massima, e per altezza, l'altezza hI, del segmento. 3.° finalmente, che le superficie de' segmenti siano tra loro, come le porzioni dell'asse ai detti segmenti corrispondenti.

TEOREMA VI.

Il prisma, che ha la medesima base, e la stessa altezza col semipoliedro interno, sta al semipoliedro, nella ragione di 3 a 2.

(Tav. II. Fig. 14)

Concepiscasi l' emisfero AIB, ciconscritto al semipoliedro EDFGI, e s' intenda lo emisfero diviso in un numero infinito di piani tutti paralleli alla sezione massima, gli quali saranno cerchi, e dentro di essi vi saranno inscritte infinite sezioni corrispondenti al semipoliedro; Ma il cerchio massimo ADBG sta a ciascuno di essi, come la sezione massima EDFG, a ciascuna delle sezioni corrispondenti a detti cerchi (*a*). Onde la somma di tutti questi cerchi, vale a dire lo emisfero AIB, sta alla somma di tutte le sezioni o sia il semipoliedro EDFGI, come il cerchio massimo ADBG, alla sezione massima EDFG (*b*), ovvero come il cilindro, che ha per base il cerchio massimo ADBG, e per altezza HI, al prisma, che ha per base la sezione massima EDFG, e per altezza la stessa HI (*c*); e permutando il cilindro, che ha

(a) *Avvert. Teor.* 4. *Cap.* 3.
(b) *Prop.* 12. *lib.* 5.
(c) *Prop.* 69. *de Sphae, et Cyl. Caravelli.*

ıa per base il cerchio ADBG, e per altezza
II, sta allo Emisfero, come il prisma, che
ıa per base la sezione EDFG, e per altezza
II, al semipoliedro EDFGI; ma il cilindro,
ta allo Emisfero AIB, come 3 : 2 (*a*);
)unque il prisma EDFGI, circonscritto al
emipoliedro, sta al medesimo semipoliedro
EDFGI, come 3 : 2. Ciocchè doveasi dimo-
trare.

COROLLARIO I.

Sicchè ancora il prisma, che ha per base
ı sezione massima, e per altezza l'asse del
oliedro interno, sta al detto poliedro nella
ıgione di 3 : 2.

COROLLARIO II.

Siccome il prisma, che ha per base la sez-
one del semipoliedro interno, sta al semipo-
edro, come 3 : 2; Così convertendo si ave-
, che il prisma circonscritto al semipolie-
o, sta al prisma semipoliedro cavo nella
gione di 3 : 1.

AVVERTIMENTO.

Le illazioni dedotte dal Teorema III. di
que-

(a) *Corol. prop.* 68. *de Sphæ., et. Cyl. Caravelli.*

questo Capitolo, possonsi col medesimo razio-
cinio dedurre dal precedente Teorema, e so-
no. I. Che lo Emisfero, sta al semipoliedro
interno, come il cerchio massimo, alla sezio-
ne massima. II che il segmento sferico, s
al segmento del poliedro corrispondente, co-
me la base del detto segmento, alla base de
segmento del semipoliedro; ovvero come i
cerchio massimo, alla sezione massima. III.
che gli settori sono, come le sezioni corri-
spondenti nella sfera, e nel poliedro. IV. ch
tanto gli segmenti, quanto gli settori son
proporzionali colla sfera, e col poliedro, V.
finalmente si averà il valore del settore d
un poliedro interno, siccome si calcola il se
tore sferico, e così ancora de' segmenti.

TEOREMA VII.

(Tav. II. fig. 15 n. 1. 2.)

Se il semipoliedro Ellittico AEFBGHI
sia secato dal piano QPRS; parallelo a
la sezione massima. Dico, che la sezion
QPRS, è simile alla massima EFGH.

Essendo gli piani paralleli QPRS, AEFBGH
secati dagli piani verticali AQI, EPI, FR
le communi sezioni, QO, AK; PO, EK
OR, KF, saranno parallele (*a*) e gli ang
li IKA, IKE, IKF, saranno retti (*b*), co
ai

(a) *Prop.* 16. *lib.* 11.
(b) *Prop.* 19. *lib.* 11.

ncora saranno retti gli angoli IOQ, IOP, OR (*a*). Ciò posto, sia IL, dupla di IK, he sarà uno degli assi conjugati; e per la ropriatà della Ellissi, si averà

$$QO^2 : AK^2 = \text{rett. } IOL : IK^2;$$

nella Ellissi IPE, si averà ancora

$$PO^2 : EK^2 = \text{rett. } OIL : IK^2.$$

)nde $QO^2 : AK^2 = PO^2 : EK^2$ (*b*);

$$QO : AK = PO : EK \text{ (}b\text{)};$$

l essendo AK = EK, sarà QO = PO; Così ancora si potrà dimostrare di tutte le ette tirate dal punto O alli vertici degli ngoli della sezione, che siano eguali tra lo-); onde facendo centro nel punto O, coll' ntervallo OQ, descrivendo un cerchio, que-o passarà per li vertici degli angoli della gura QPRS, e questa sarà inscritta nel det-) cerchio. Inoltre essendo le due rette QO, P, parallele alle due AK, EK, perciò l'an-)lo QOP, sarà eguale all' angolo AKE (d), osì ancora gli angoli POR, EKF; ROS, KB, saranno eguali, e per conseguenza sa-nno eguali ancora gli angoli OQP, KAE; PQ, KEA; OPR, KEF. Sicchè dunque le gure QPRS, AEFBGH, saranno equiangole;

(a) *Prop.* 29. *lib.* 1.
(b) *Prop.* 11. *lib.* 5.
(c) *Prop.* 22. *lib.* 6.
(d) *Prop.* 10. *lib.* 11;

ed essendo gli triangoli QOP, AKE; POR EKF equiangoli; perciò si averà.

$$QP : PO = AE : EK \ (a),$$

e permutando $QP : AE = PO : EK$;

ma $PO : EK = PR : EF$;

Dunque $QP : AE = PR : EF$,

e permutando $QP : PR = AE : EF$;

della stessa maniera si dimostra di tutti gl altri lati; Perciò la figura QPRS, è simil alla sezione massima AEFBCH (*b*), Ciocch doveasi dimostrare.

COROLLARIO I.

Essendo la sezione QPRS, simile alla se zione massima AEFBGH; sarà la sezion QPRS, alla sezione AEFBGH, come QP^2 ad AE^2 (*c*), ovvero come $QO^2 : AK^2$; oppu re come il rettangolo di lO, in OL, al qua drato di IK, per la proprietà della ellissi.

COROLLARIO II.

Essendo $QP : PR = AE : EF$,

permutando $QP : AE = PR : EF$;

Così ancora essendo $PR : RS = EF : FB$

permutando $PR : EF = RS : FB$;

Co

(a) *Prop.* 4 *lib.* 6.
(b) *Def.* 1. *lib.* 6.
(c) *Prop.* 20. *lib.* 6.

Così andando avanti, si averà, che la somma di tutti gli lati della figura QPRS, stia alla somma di tutti gli lati della figura AEFBGH, come QP : AE (*a*); ovvero come QO : AK.

AVVERTIMENTO

Sia CID un emifero, che abbia per raggio CK, sarà CID, semicerchio, ed essendo il perimetro della figura QPRS, al perimetro della figura AEFBGH, come QO, ad AK; Ma mO : QO = CK : AK, (*b*) e permutando mO : CK = QO : AK; Dunque il perimetro della figura QPRS, sta al perimetro AEFBGH, come mO : CK, ovvero come la periferia del cerchio, il di cui raggio è mO, alla periferia del cerchio, il raggio del quale è CK (*c*); Sicchè dunque qualunque sezione che si fa nello Emisfero, si averà che la periferia del cerchio, stia al perimetro della sezione corrispondente nel semipoliedro ellittico, come la periferia del cerchio di un' altra sezione, al perimetro della sezione corrispondente nel semipoliedro; E prendendosi le periferie degl'infiniti cerchi, che si possono dare nello emisfero CID, per ele-

(a) *Prop.* 12. *lib.* 5.
(b) *Corol.* 1. *Teor.* 3. *Cap.* 1.
(c) *Prop.* 4. *de circ. dim. Caravelli.*

menti della superficie Emisferica, e gli perimetri delle infinite sezioni corrispondenti nel semipoliedro AIB, per elementi della superficie del semipoliedao; Si averà che la somma delle infinite periferie, cioè la superficie dello Emisfero CID, stia alla somma de'perimetri, cioè alla superficie del semipoliedro AIB, come la periferia del cerchio, il di cui raggio è CK, al perimetro della sezione massima AEFBGH, ovvero come la superficie del cilindro, che ha per base il cerchio, il di cui raggio è CK, ed abbia per altezza KI, alla superficie del prisma, che ha la stesa altezza KI, e per base la sezione massima AEFBGH (*a*); E permutando, ed invertendo la superficie del cilindro, che ha per base il cerchio il di cui raggio è CK, e per altezza IK, sta alla superficie dello Emisfero CID, come la superficie del prisma, che ha per base la sezione massima AEFBGH, e per altezza IK, alla superficie del semipoliedro AIB; Ma la superficie del cilindro, che ha per base il cerchio, il di cui raggio è CK, e per altezza IC, è eguale alla superficie del prisma, che ha per base la sezione massima del semipoliedro AIB, e per altezza la KI, sarà eguale alla superficie del semipoliedro.

(a) *Corol.* 2. *prop.* 11. *de Sphae et Cyl. Caravelli.*
(b) *Prop.* 49 *de Sphae et Cyl. Caravelli.*

COROLLARIO.

Col medesimo raziocinio si può dimostrare, che la superficie del segmento QIS, del semipoliedro AIB, sia eguale alla superficie del prisma, che ha per base la sezione massima, e per altezza, la OI, altezza del segmento.

TEOREMA VIII.

Se il semipoliedro AEFBGHI, si seca per un piano parallelo alla sezione massima, e si concepisca, col raggio IK, descritta una mezza sfera, il piano secante passando per lo emisfero, segnerà un cerchio. Dico, che la base AEFBGH, stia al circolo massimo CD, dello Emisfero CID, come la sezione QPRS, al circolo il di cui diametro è mn.

Per il Corollario I. del Teorema precedente, la figura QPRS, sta alla figura AEFBGH, come il rettangolo di IO, in OL, al quadrato di IK; ma il rettangolo di IO, in OL, è eguale al quadrato di mO (*a*), come perpendicolare sopra il diametro IL; dunque la figura QPRS, sta alla figura AEFBGH, come $mO^2 : IK^2$, ovvero come il cerchio, il

(a) *Prop.* 17 *lib.* 6.

il di cui diametro è mn , al cerchio , il di cui diametro è AB (*a*) ; Sicchè dunque la figura QPRS , sta alla sezione massima AEFBHG, come il cerchio, il di cui diametro è mn, al cerchio il di cui diametro è AB. Ciocchè doveasi dimostrare.

TEOREMA IX.

Il prisma circonscritto ad un semipoliedro Ellittico , sta al semipoliedro avendo la stessa base , e la medesima altezza , nella ragione di 3 : 2.

COncepiscasi nel semipoliedro Ellittico AEFBGHI , descritto lo Emisfero , che abbia per raggio la IK ; e s'intenda diviso il semipoliedro in un numero infinito di piani tutti paralleli alla sezione massima AEFBGH; questi , oltre , che saranno elementi del detto semipoliedro AEFBGHI , segueranno ancora nello emisfero CID , altri tanti piani , gli quali saranno ancora elementi dello emisfero; Ma le sezioni nel semipoliedro sono , come gli cerchi corrispondenti, e segnati nello emisfero (*a*) ; dunque la somma delle infinite sezioni nel semipoliedro AEFBGHI , ovvero il semipoliedro medesimo , come somma degli suoi

(a) *Prop.* 2. *lib.* 12.
(b) *Teor. precedente.*

suoi elementi, starà alla somma di tutti gli cerchi segnati nello emisfero, oppure allo emisfero medesimo CID, come la sezione massima AEFBGH, al cerchio massimo, il diametro del quale è CD (a), ovvero come il prisma, che ha per base la sezione massima AEFBGH, e per altezza IK, al cilindro, che ha per base il cerchio CD e per altezza la stessa IK (b); e permutando, ed invertendo, il prisma, che ha per base la sezione massima AEFBGH, e per altezza IK, sta al semipoliedro AEFBGHI, come il cilindro, la di cui base è il cerchio CD, e l'altezza, IK, allo emisfero CID; ma il cilindro sta allo emisfero nella ragione di 3:2 (c). Dunque ancora il prisma circonscritto al semipoliedro, sta al semipoliedro, come 3 : 2; Ciocchè doveasi dimostrare.

COROLLARIO

Il prisma circonscritto al semipoliedro, stando al semipoliedro nella ragione di 3 : 2; convertendo il prisma starà al prisma semipolhedro cavo, come 3 : 1.

AV-

(a) *Prop.* 12. *lib.* 5.
(b) *Prop.* 69. *de sphæ:, et Cyl. Caravelli.*
(c) *Corol. prop.* 68. *de sphæ: et Cyl. Caravelli.*

AVVERTIMENTO I.

Da quel tanto è stato dimostrato nel precedente Teorema, se ne deduce; I.° che il segmento QIS, del poliedro, sta al segmento mln, della sfera, come la sezione QS, alla sezione circolare mn. II.° E comecchè la sezione QS, sta alla sezione circolare mn, come la sezione massima AB, al cerchio massimo CD, e la sezione massima, sta al cerchio massimo, come il semipoliedro AEFBGH, ovvero il suo totale, allo emisfero CID, ovvero alla intiera sfera; Perciò gli segmenti poliedrici, stanno agli segmenti sferici, nella ragione de'totali. III.° E gli settori sono nella stessa ragione.

Quel tanto si è dimostrato ne'semipoliedri per rapporto a' prismi, che hanno la medesima basc, e la stessa altezza, ed al paragon delle sfere, che hanno per diametro l'asse del poliedro, ha luogo ancora colli totali poliedri, e sfere essendo questi dupli di quelli.

AVVERTIMENTO II.

Essendosi dimostrato, che gli semipoliedri tanto circonscritti, ed inscritti nella sfera, quanto quelli Ellittici, stanno alli prismi, che hanno le medesima base, e la stessa altezza, come 2 : 3. Ne segue, che gli prismi aven-

avendo la stessa base, ed altezza, con gli semipoliedri, saranno quelli proporzionali con questi; e come si fanno eguali gli semipoliedri, avendo basi, ed altezze eguali; così saranno in ragion delle basi, se le altezze sono eguali; ed al contrario saranno nella ragione delle altezze, quando le basi sono eguali; e se le altezze, e le basi sono disuguali, saranno nella ragion composta delle basi, e delle altezze; poichè in tali ragioni sono gli prismi. E finalmente tuttocciò è stato dimostrato ne' prismi, averà luogo ancora ne' poliedri.

AVVERTIMENTO III.

Se un semipoliedro fusse generato da archi circolari in alcuni lati, e nell'altri da Ellittici, gli quali andassero a terminare in un sol punto, questo semipoliedro, starà al prisma, che ha la medesima base, e la stessa altezza, come 2: 3. Poicchè dal vertice del detto semipoliedro abbassando la perpendicolare IK, su la base EFGH; e dal punto K, alli punti E, F, G, H, tirandosi le rette KE, KF, KG, KH, e tra queste rette, e la perpendicolare IK, concepiscansi passare altritanti piani, il semipoliedro EFGHI, restarà diviso verticalmente in tante porzioni, quanto è il numero de'lati della sezione massima; e di queste parti supponiamo, che le due

due porzioni EKHI, FKGI, siano di semipoliedro circonscritto, o inscritto nella sfera, e le altre due EKFI, GKHI, siano porzioni di semipoliedro Ellittico, ma ciascuna di dette porzioni, sta al prisma triangolare, avendo la medesima base, e la stessa altezza con detta porzione, come 2: 3. Dunque la somma di dette porzioni, o sia il semipoliedro misto, starà al prisma, che ha la medesima base, e la stessa altezza, come 2: 3.

Col medesimo raziocinio si avrà la cognizione del valore della superficie del semipoliedro misto, moltiplicando il perimetro della base per l'altezza di esso; vale a dire, che sarà eguale alla superficie del prisma, che ha la medesima base, e la stessa altezza col semipoliedro.

AVVERTIMENTO IV.

(Tav. II. fig. 12.)

Giova quì dare il modo, come possa conoscersi di qual natura sia un semipoliedro dato. I. Se il raggio KI, è eguale alla metà della retta tirata nel mezzo de' lati opposti, come sarebbe la BD, essendo il numero de' lati paro, in tal caso il semipoliedro è circonscritto alla sfera, poichè BPI, si fa quadrante del circolo; e se il numero de' lati è imparo, allora questo raggio si farà eguale ad una delle porzioni delle perpendicolari abbassate da due angoli della sezione massima,

na., sopra due lati opposti a detti angoli, presa dalla intersezione di dette perpendicolari, e corrispondente ad un di detti lati.

(Tav. II. fig. 14)

II. Se il raggio HI, si fa eguale alla retta EH, tirata dallo estremo di detto raggio, ad un angolo della sezione massima, allora il semipoliedro è inscritto nella sfera.

(Tav. II. fig. 15. n. 1.)

III. Se il raggio KI, è minore di KE, retta tirata dallo estremo di detto raggio, all'angolo della sezione massima ed alla metà di ciascun lato, in tal caso il semipoliedro è ellittico, ed il semiasse minore delle Ellissi, sarà il raggio.

(Tav. II. fig. 15 n. 2.)

IV. Finalmente se il raggio KI, è maggiore della riferita retta, tirata dallo estremo K, all'angolo della sezione massima, il semipoliedro sarà ellittico, ed il semiasse maggiore delle Ellissi, sarà il raggio del semipoliedro.

Di tutti questi, solo il primo ha la sua superficie totale quadrupla della sezione massima, e gli altri la loro superficie è eguale a quella del prisma, che ha la medesima base, e la stessa altezza col poliedro.

AVVERTIMENTO V.

Da tutto ciò che si è dimostrato si rileva il metodo per avere il valore della solidità di qualunque Volta poliedrica; e perciò devesi trovare un quarto proporzionale dopo li due

numeri costanti 3 , 1 , e la solidità del prisma , che ha la medesima base , e la stessa altezza con la detta volta , e questo sarà la solidità di essa , alla quale devesi aggiungere il solido della grossezza alla cima.

Se poi si voglia sapere la sua superficie basta moltiplicare il perimetro della base per l' altezza di detta Volta.

CAP. VI.

Della solidità delle varie specie di Volte a Gavetta, o Schifo.

DEFINIZIONI.

I. Sia la figura ABCD, rettangolare, e sopra gli quattro lati s'intendano innalzati gli archi RI, SK, NK, OL; VL, TM; QM, PI, sopra de' quali si concepiscano moversi gli quattro lati del detto rettangolo, fintantocchè giungano nella fine di detti archi, e nel mezzo vi sia il piano rettangolare IKLM, il solido, che ha per superficie concava, quella del moto già descritto de' quattro lati, ed il piano di mezzo, e per superficie piana il rettangolo abcd, una con gli rettangoli d'attorno Ab, Bc, Cd, dA, si chiamerà *Volta a Gavetta*; ha presa una tal denominazione per essere simile alle scudelle di legname, nelle quali gli forzati mettono le loro vivande che così vengon dette; e perchè si rassomiglia ad un battello, o sia Schifo, perciò altri l'han chiamata *a Schifo*. T. II. fig. 16.

II. La KF, si chiamerà *sesto* della Volta; e grossezza della cima, la grossezza della fabbrica soprapposta.

III. Per *incosciatura* s'intende il solido rac-

chiuso dalla superficie curva, e dalla piana del prolungamento de' lati del rettangolo, come sarebbe KBbCcL.

IV. Si dirà volta a Gavetta circolare, allora quando gli archi RI, SK sono quadranti.

V. Se gli archi RI, SK sono ellittici, si dirà Volta a Gavetta ellittica.

PROBLEMA.

Trovare una formola generale, per avere il valore della solidità di qualunque Volta a Gavetta circolare.

Sia data la lunghezza AB, la larghezza BC, il sesto EI, della Volta a Gavetta AC; trovare la formola generale per avere il valore della solidità di essa.

Sia AB $= a$; BC $= b$; EI $=$ EP $=$ AR $=$ ER $=$ BN $= c$
sarà IK $=$ AB $-$ AR $-$ SB $= a - 2c$,
e sarà LK $=$ BC $-$ BN $-$ OC $= b - 2c$.
Il parallelepipedo FM, sarà uguale ad EF $\times$. FG$\times$EI $= (a - 2c)(b - 2c)\, c = abc - 2bc^2 - 2ac^2 + 4c^3 =$ A
Il quadrante IER $= \frac{11}{14}(\overline{IE}^2) = \frac{11}{14}\, c^2$,
e 2IER $=$ 2IPE $= \frac{11}{7}\, c^2$;
ed IERSFK $+$ THMLVG $= \frac{11}{7}\, c^2\,(a - 2c) = \frac{11}{7}\,(ac^2 - 2c^3)$ IPEHMQ$+$KFNGOL $= \frac{11}{7}\, c^2\,(b - 2c) = \frac{11}{7}\,(bc^2 - 2c^3)$. Onde 2IERSFK $+$ 2IPEHMQ $= \frac{11}{7}\,(ac^2 + bc^2 - 4c^3) =$ B.

Inol-

Inoltre sarà la quarta parte AREPI, del semipoliedro, formato dalle sezioni, che nella figura osservansi = PR × $\frac{2}{3}$ IE = $c^2 \times \frac{2}{3} c = \frac{2}{3} c^3$ (*a*);
e 4AREPI = $\frac{2}{3} c^3 = C$;
Onde A + B + C = $abc - 2ac^2 - 2bc^2 + 4c^3 + \frac{1}{7}(ac^2 + bc^2 - 4c^3) + \frac{8}{21} c^3 = \frac{21\ abc - 9ac^2 - 9bc^2 + 8c^3}{21} = c\left(\frac{ab - 3ac - 3bc + 8c^2}{7}\right)$

Che sarà l'anima della Volta a Gavetta AC. Ed il solido dalla volta senza la grossezza della cima sarà = $abc - c\left(\frac{ab - 3ac - 3bc + 8c^2}{7}\right) = \frac{c^2}{21}(9a + 9b - 8c)$. Ciocchè si andava cercando.

AVVERTIMENTO I.

Per avere il valore della solidità di una Volta a Gavetta circolare, devesi.

I. prendere nove volte la somma della lunghezza, e larghezza di essa, e da detta somma se ne deve togliere otto volte il sesto, ed il residuo si noti.

II. Dopo il numero costante 21., il quadrato del sesto, ed il detto residuo, si trovi un quarto proporzionale; al quale aggiuntovi

(*a*) *Teor. 3. Cap. 2.*

il solido della fabbrica della grossezza alla cima, il quale si ha moltiplicando la lunghezza, per la larghezza, e per la grossezza alla cima; la somma sarà la solidità di detta Volta.

Sia, per esempio, la lunghezza $a = 18$; la larghezza $b = 16$; il sesto $c = 6$; e la grossezza alla cima sia 1. La somma della lunghezza, e larghezza nove volte presa, sarà 306, da questa se ne tolga l'ottuplo sesto, ch'è 48, ed il residuo 258, si noti. Indi si facci, come il numero costante 21, al quadrato del sesto, ch'è 36, così il detto residuo 258, al quarto proporzionale $442\frac{2}{7}$, che saranno le incosciature di detta Volta; alle quali aggiuntovi il solido fatto della lunghezza, e larghezza di detta volta, per la grossezza della cima, ch'è 288; la somma $730\frac{2}{7}$; sarà la solidità di detta Volta.

COROLLARIO.

Se la lunghezza a; si farà eguale alla larghezza b, di manieracchè la Volta divenisse quadrata, in tal caso, si prenderà diciotto volte uno de' suoi lati, poicchè la somma della lunghezza, e della larghezza è la stessa della dupla di una di esse.

AV-

AVVERTIMENTO II.

Se la larghezza PE, della incosciatura di detta Volta a Gavetta non fusse eguale al sesto EI, allora la sua solidità non si averà facendo uso della regola diggià detta. Perciò è necessario ora ritrovare un'altra generale formola, la quale ci porta al rinvenimento del valore della solidità di detta Volta. Sia per tanto AB $=a$; BC $=b$; IE $=d$; AR $=$ SB $=$ RE $=$ BN $=c$.
Sarà IK $=$ AB $-$ AR $-$ SB $=a-2c$.
ed LK $=$ BC $-$ BN $-$ OC $=b-2c$.
Onde farà il parallelepipedo FM $=(a-2c)(b-2c)\,d=abd-2bcd-2acd+4c^2d=$ A
Il quadrante Ellittco IER $=\frac{11}{14}$ IE×ER $=\frac{11}{14}\,dc$ (a) e 2IER $=$ 2IPE $=\frac{11}{7}\,dc$;
ed IERSFK $+$ HMTVGL $=\frac{11}{7}\,dc\,(a-2c)=\frac{11}{7}\,(bcd-2dc^2)$
ed IPEHMQ $+$KFNOLG $=\frac{11}{7}\,dc\,(b-2c)=\frac{11}{7}\,(bcd-2dc^2)$.
Onde 2IERSFK$+$2IPEHMQ $=\frac{11}{7}\,(acd+bcd-4dc^2=$ B.
Inoltre sarà la quarta parte APERI, del semipoliedro Ellittico $=$ PR $\times\frac{2}{3}$ IE $=c^2\times\frac{2}{3}\,d=\frac{2}{3}\,c^2d$ (b)
e 4APERI $=\frac{8}{3}\,c^2d=$C

(a) *Teor.* 4. *Cap.* 1.
(b) *Teor.* 9. *Cap.* 3.

Siechè l'anima della Volta a Gavetta, sarà $A + B + C = abd - 2bcd - 2acd + 4c^2d + \frac{11}{7}(acd + bcd - 4c^2d) + \frac{8}{21}c^2d = 21abd - 9acd - 9bcd + 8c^2d = d(ab - \frac{3ac}{7} - \frac{3bc}{21} + \frac{8c^2}{21})$.

Ma il parallelepipedo fatta da AB, per BC, per $Cy = abd$.

Dunque la solidità della Volta senza la grossezza della cima, sarà

$abd - d(ab - \frac{3ac}{7} - \frac{3bc}{21} + \frac{8c^2}{21}) = \frac{cd}{21}(9a + 9b - 8c)$.

Siechè dunque per avere il valore di una Volta a Gavetta, le incosciature della quale siano Ellittiche, devesi.

I. Prendere nove volte la somma della lunghezza, e larghezza di essa, e da detta somma se ne deve togliere otto volte il sesto; ed il residuo si noti.

II. Dopo il numero costante 21, il rettangolo fatto dal sesto, e dalla larghezza di detta incosciatura, ed il detto residuo, si trovi un quarto proporzionale; al quale aggiuntovi il solido della fabbrica della grossezza alla cima, il quale si ha moltiplicando la lunghezza, per la larghezza, e per la grossezza alla cima, la somma sarà la solidità di detta Volta.

Sia,

Sia, per esempio, $a = 30$; $b = 24$; $d = 6$; $c = 8$ si farà come il numero costante 21, alla somma della lunghezza, e larghezza presa nove volte, meno otto volte il sesto d, che sarà 438., così il rettangolo del sesto, e della larghezza della incosciatura, ch' è 48, al quarto proporzionale $1001\frac{1}{7}$, al quale aggiuntovi il solido della grossezza alla cima, ch' è 720; la summa $1721\frac{1}{7}$, sarà il valore della solidità di detta Volta.

CAP. V

Della superficie della Volta a Gavetta.

DEFINIZIONE.

T. II. fig. 16. PEr superficie della volta a Gavetta, s' intende, la superficie che descrive il moto de' quattro lati AB, BC, CD, DA, del rettangolo ABCD, sopra gli quadranti RI, SK; NK, OL; VL, TM; QM, PI, o circolari, o Ellittici, ed il rettangolo di mezzo IKLM.

PROBLEMA.

Trovare una formola generale per avere il valore della superficie di una Volta a Gavetta, le incosciature della quale siano quadranti circolari, essendo data la lunghezza, la larghezza, ed il sesto.

SIa AB $= a$; BC $= b$; EI $=$ EP $=$ AR $=$ ER $=$ BN $= c$;
farà IK $=$ AB $-$ AR $-$ SB $= a - 2c$,
ed LK $=$ BC $-$ BN $-$ OC $= b - 2c$;
Ma essendo il diametro di qualunque cerchio, alla sua periferia, come 7 : 22; siccome ha dimostrato il celebre Archimede, perciò il

rag-

raggio starà alla semiperiferia nella stessa ragione; Onde sarà $2RI = \frac{22}{7} IE = \frac{22}{7} c$;
e $2IRSK = \frac{22}{7} c (a - 2c)$,
e $2KNOL = \frac{22}{7} c (b - 2c)$
Sicchè $2IRSK + 2KNOL = \frac{22}{7} c(a + b - 4c^2) = A$
Inoltre la superficie di $4ARIP = 8 c \times c = 8c^2$ (a) $= B$;
Ed il rettangolo $IMLK = (a - 2c) (b - 2c) = ab - 2bc - 2ac + 4c^2 = C$
Sicchè dunque la superficie totale di detta Volta sarà $A+B+C = \frac{22}{7} c (a + b - 4c + 8c^2 + ab - 2bc - 2ac + 4c^2 = ab + \frac{4c}{7} (2a + 2b - c)$; Ciocchè si andava cercando.

AVVERTIMENTO I.

Per avere il valore della superficie di una Volta a Gavetta, le incosciature della quale sono quadrati circolari, devesi,

I. Dalla somma della lunghezza, e larghezza due volte presa sottraere il sesto, ed il residuo si noti.

II. Dopo il numero costante 7, il detto residuo, ed il quadruplo del sesto, si trovi un quarto proporzionale, e si noti.

III. Finalmente si sommi il quarto proporzionale ritrovato col rettangolo, o sia prodot-

(a) *Teor.* 2. *Cap.* 3.

dotto della lunghezza, per la larghezza di detta Volta, e la somma sarà la superficie di detta Volta.

Sia, per esempio, la lunghezza $a = 18$; la larghezza $b = 16$; il sesto $c = 6$; la dupla summa della lunghezza, e della larghezza sarà 68, dalla quale dedottone il sesto 9, il residuo sarà 62; Indi dopo il numero costante 7, il residuo 62, ed il quatruplo del sesto, ch'è 24, si trovi un quarto proporzionale $212\frac{4}{7}$, ed a questo aggiuntovi il rettangolo fatto dalla lunghezza, per la larghezza ch'è 288, la somma $500\frac{4}{7}$, sarà il valore della detta superficie.

COROLLARIO.

Se la lunghezza si farà eguale alla larghezza, allora la volta sarà quadrata, e facendosi $b = a$, la equazione si ridurrà ad $a^2 + \frac{4c}{7}(4a - c)$, e la superficie si averà.

I. Se dal quadruplo di uno de' suoi lati, se ne toglie il sesto, ed il residuo si noti.

II. Dopo il numero costante 7, il residuo notato, ed il quadruplo sesto, si trovi un quarto proporzionale.

III. Finalmente si aggiunga al detto quarto proporzionale, il quadrato del lato di detta Volta; e la somma sarà il valore della superficie.

AV-

AVVERTIMENTO II.

Se la larghezza PE, della incosciatura di
etta Volta a Gavetta non fusse eguale al se-
o EI, in tal caso le incosciature saranno
llittiche; e perciò ponendo PE = AR =
E = d;
E = c; AB = a; BC = b;
arà IK = AB — AR — SB = $a - 2d$
d LK = BC — BN — OC = $b - 2d$
nde sarà la suttesa RI = $\sqrt{c^2+d^2} = e$
l quadrante Ellittico RI, sarà eguale $\frac{3.1.4.1}{2.1.2.1}$
I = $\frac{3.1.4.1}{2.1.2.1}$ e (a).
sarà il duplo quadrante Ellittico RI = $\frac{3.1.4.1}{1.4.1.4}$ e;
la superficie di 2IRSK = $\frac{3.1.4.1}{1.4.1.4}$ e ($a - 2d$)
osì ancora 2KNOL = $\frac{3.1.4.1}{1.4.1.4}$ e ($b - 2d$)
nde 2IRSK + 2KNOL = $\frac{3.1.4.1}{1.4.1.4}$ e($a + b - d$) = A
a superficie di 4ARIP = $8c+d = 8cd(b)$ = B
d il rettangolo IMLK = ($a - 2d$) ($b - d$) = $ab - 2bd - 2ad + 4d^2$ = C
nde tutta la superficie di detta Volta sarà
+ B + C = $\frac{3.1.4.1}{1.4.1.4}$ e ($a + b - 4d$) + $8cd$ + $b - 2bd - 2ad + 4d^2 = ab + \frac{3.1.4.1}{1.4.1.4}$ e ($a+b-d$) + d ($8c + 4d - 2b - 2a$).

Sic-

(a) *Corol. 4. Teor. 3. Cap. 2.*
(b) *Avvert. Teor. 7. Cap. 3.*

Sicchè dunque per avere il valore della s
perficie di una Volta a Gavetta, le incosci
ture della quale siano Ellittiche, devesi.

I. Moltiplicare il numero costante 3141
per la suttesa della incosciatura, ed il pr
dotto si noti.

II. Dalla somma della lunghezza, e la
ghezza di detta Volta, se ne tolga quatt
volte la larghezza delle incosciature, ed il r
siduo si noti.

III. Dopo il numero costante 1414, il d
to prodotto, ed il residuo notato, si tro
un quarto proporzionale, e si noti.

IV. Dalla somma di otto volte il sesto,
quattro volte la larghezza delle incosciatur
se ne tolga la doppia summa della lunghez
e larghezza di detta Volta; ed il residuo
moltiplichi per la larghezza delle dette in
sciature, ed il prodotto si noti.

V. Finalmente si moltiplichi la lunghez
per la larghezza di detta Volta, ed al pr
dotto vi si aggiunga il detto quarto propo
zionale, ed il prodotto notato nel *n. IV*,
la somma sarà il valore della superficie
detta Volta.

Sia per esempio la lungezza $a = 12$;
larghezza $b = 11$; la larghezza delle incosc
ture $d = 5$; il sesto $c = 3\frac{1}{4}$; sarà la sutt
delle incosciature $e = 6\frac{1}{4}$; Il prodotto del r
mero constante 3141, per la detta suttesa s
19631 $\frac{1}{4}$; il residuo della somma della lu
ghe

ezza, e larghezza di detta Volta, meno la adrupla larghezza delle incosciature, sarà Indi dopo il numero costante 1414, il odotto 1963 $\frac{1}{4}$, ed il residuo 3, si trovi quattro proporzionale 41 $\frac{1}{2}\frac{1}{0}$, e si noti. Il siduo dell' ottuplo sesto, più la quatrupla ghezza delle incosciature, dedottane la du- somma della lunghezza, e larghezza di tta Volta, che è 4, ed il prodotto di que- residuo per le larghezza delle incosciature rà 20. Finalmente il prodotto della lunghez-, e larghezza di detta Volta si è 132, e unito al notato quarto proporzionale 41 $\frac{1}{3}\frac{1}{0}$, al detto prodotto 20; la somma 193 $\frac{1}{2}\frac{1}{0}$; rà il valore della superficie di detta Volta.

AVVERTIMENTO III.

Tre casi diversi possono accadere nel fare detta operazione. I. Se la somma dell' ot-lo sesto, più la quatrupla larghezza delle osciature, è maggiore della dupla somma lla lunghezza, e larghezza, ed in tal caso ultimo termine della equazione viene posi- o, e l' operazione si fa siccome si è detto ll' avvertimento precedente. II. Se la som- dell' ottuplo sesto, più la quatrupla lar- ezza delle incosciature, è eguale alla du- somma della lunghezza, e larghezza, ed ora la equazione si ridurrà ad $ab + \frac{3}{2}\frac{1}{0}\frac{4}{1}\frac{1}{4}e$

$(a+$

$(a+b-4d)+$; e pertanto al quarto p
porzionale vi si aggiunga il prodotto de
larghezza, e lunghezza di detta Volta, e
si unisca ancora la larghezza delle incoscia
re, e la somma sarà il valore della super
cie. III. Finalmente, se la somma dell' ot
plo sesto, più la quadrupla larghezza de
incosciature, sarà minore della dupla som
della lunghezza e larghezza della Volta,
tal caso dalla dupla somma della lunghezz
e larghezza di detta Volta, se ne tolga
somma dell' ottuplo sesto, più la quadru
larghezza delle incosciature, ed il residuo
moltiplichi per la larghezza dell' incoscia
re; e comecchè l' ultimo termine $d(8c+4d$
$2b-2a)$, nella equazione si ritrova espres
per positivo, diverrà in tal caso, negativ
e perciò dalla somma del detto quarto p
porzionale, ed il prodotto della lunghezz
e larghezza, se ne deve togliere il descri
prodotto, ed il residuo sarà il valore de
superficie di detta Volta.

CAP. VI

Della solidità delle varie Volte a vela senza regulio.

DEFINIZIONI.

PEr *Volta a vela* s' intende un solido cavo sostenuto da quattro archi, e con sua cavità copre un edificio; ha presa una le denominazione dal gonfiamento delle ve- mercè l' urto del vento, e stando frenate e quattro angoli, formano una cavità nel mezzo.

II. Se gli quattro archi, che sostengono la etta Volta sono semicircolari, la Volta si iamerà a vela sferica, se sono Ellittici si irà a vela sferoidale.

Da ciò ne viene la divisione di quante spe- e puole essere una Volta a vela. I. Se gli chi, che sostengono la detta Volta sono se- icircolari, ed in tal caso la detta Volta ve coprire un edificio di pianta quadrata.

Puole essere anche quadrata, e gli archi, e sostengono la detta Volta siano Ellittici.

.. Puole essere formata sopra un rettango- , ed avere gli due archi formati sopra gli i minori Ellittici, e gli altri due sopra lati maggiori semicircolari. IV. Al con- rio puole essere rettangolare la detta Vol- , e gli archi sopra gli lati maggiori Ellit-

tici

tici, e quelli sopra gli lati minori semicir colari. V. Puole essere formata sopra una pianta quadrata, e gli archi formati sopra gli lati possono essere Ellittici, e gli ass minori delli quali siano gli detti lati. VI Finalmente puole essere formata sopra un pianta rettangolare, e gli archi, che la so stengono siano Ellittici di qualunque natura Di tutte queste se ne farà vedere la di lor generazione, e si rapporteranno a quella sferica per averne la di loro solidità.

III. La lunghezza e larghezza di dett Volta sono le sottese de due archi, che for mano angolo; il *sesto* è quello stesso di cia scuno degli archi; ed il *reguglio*, si chiame rà l'altezza della curvità da sopra la cim degli archi.

IV. Se una Volta a vela è senza reguglio allora si dirè *Volta a vela tronca.*

PROBLEMA.

Trovare la ragion, che passa tra il parallel pipedo circonscritto ad una Volta a vela sferica tronca, e la detta volta.

Tav. II. fig. 17. Sia dato lo Emisfero RQP, la base del quale sia il circolo massimo NPQR, n quale vi sia inscritto il quadrato NQ; sopra gli lati NP, PQ, QR, RN, si co

c

cepiscano alzati quattro piani, questi taglieranno dallo Emisfero, gli quattro semisegmenti NMPS, PnQK, QXRT, RLNI, e comecchè le sezioni de' detti semisegmenti sono semicerchi eguali, perciò se si concepisce per gli punti S, K, T, I; passare un piano, questo taglierà dallo Emisfero il segmento IBK, il quale sarà duplo di ciascuno de' detti semisegmenti, la porzione dello Emisfero dedottine gli detti semisegmenti; e segmento sarà l' anima della Volta a vela tronca sferica; o sia senza reguglio. Voglio pertanto trovare la ragione, che passa tra il parallelepipedo, la base del quale è il quadrato NQ, e l' altezza Oy, ed il solido parallelepipedo meno la detta anima della Volta.

Sia $NP = PQ = a$; sarà $NQ = Ln = \sqrt{2a^2}$; ed $nK = \frac{\sqrt{4a^2 - 2a^2}\sqrt{2}}{2}$; $aS = nK = Oy = Oa = OV = \frac{a}{2}$

Sarà ancora $OP = ON = OL = \frac{\sqrt{2a^2}}{2}$; ed $LV = By = LO - OV = \frac{\sqrt{2a^2}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{2a^2} - a}{2}$

Sarà il cerchio il di cui diametro è NQ = $\frac{22}{7}\sqrt{2a^2} \times \frac{\sqrt{2a^2}}{4} = \frac{11}{7} a^2$

E lo Emisfero LBn = $\frac{11}{7} a^2 \times \frac{2}{3}\frac{\sqrt{2a^2}}{2} =$

$\frac{11}{21}\sqrt{2a^2} = \frac{11}{21} a3\sqrt{2}$.

Inoltre il cerchio, che ha per raggio Kn = $\frac{11}{14} \times 4\overline{Kn}^2 = \frac{22}{7}\left(\frac{4a^2 - 2a^2\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{11}{14}$

$\left(4a^2 - 2a^2\sqrt{2}\right) = \frac{11}{7}\left(2a^2 - a^2\sqrt{2}\right)$

Le quattro superficie de' semisegmenti laterali NMPS, PnQK, QXRT, RLNI = $\frac{11}{7}\left(4a^2 - 2a^2\sqrt{2}\right) = \frac{22}{7}\left(2a^2 - a^2\sqrt{2}\right)$;

E gli quattro semisettori corrispondenti NMPSO, PnQKO, QXRTO, RLNIO = $\frac{11}{28}\left(2a^3\sqrt{2} - 2a^3\right) = \frac{22}{28}\left(a3\sqrt{2} - a3\right)$;

Il semicerchio PKQ = $\frac{11}{28} a2$;

Ed il semicono PKQO = $\frac{11}{168} a3$.

Onde gli quattro semiconi corrispondenti agli semisettori saranno = $\frac{11}{42} a^3$;

E perciò la solidità de' quattro semisegmenti sarà = $\frac{22}{11}\left(a^3\sqrt{2} - a3\right) - \frac{11}{42} a^3 = \frac{44a3\sqrt{2} - 55a^3}{42}$ aggiuntovi il segmento IBK = $\frac{44a3\sqrt{2} - 55a3.}{84}$

Si

Si averà la somma de' detti quattro semisegmenti, e del segmento IBK $= \frac{44a^3\sqrt{2}}{42} - \frac{55a^3}{84} + \frac{44a^3\sqrt{2}}{84} - \frac{55a^3}{84} = \frac{132a^3\sqrt{2}}{84} - \frac{165a^3}{84}$

Ma lo Emisfero LBn $= \frac{11}{21}a^3\sqrt{2}$.

Dunque lo Emisfero LBn, meno gli detti quattro semisegmenti laterali, ed il segmento IBK, sarà $= \frac{11}{21}a^3\sqrt{2} - \frac{132a^3\sqrt{2}+165a^3}{84}$

$= \frac{165a^3 - 88a^3\sqrt{2}}{84}$ Inoltre il parallelepipedo, che ha la medesima base, e la stessa altezza col detto solido sarà eguale ad $\overline{NP^2} \times Oy = \frac{a^2}{2} \times \frac{a}{2} = \frac{a^3}{2}$ Ed il detto parallelepipedo, meno il detto Emisfero tronco sarà $\frac{a^3}{2} - \frac{165a^3+88a^3\sqrt{2}}{84}$

$= \frac{88a^3\sqrt{2}-123a^3}{84}$.

Sicchè dunque il detto parallelepipedo, sta al medesimo parallelepipedo meno l' anima della Volta, vale a dire, alla solidità di essa Volta, nella ragione di $\frac{a^3}{2} : \frac{88a^3\sqrt{2}-123a^3}{84}$; ovvero come $42a^3$, ad $88a^3\sqrt{2} - 123a^3$; e

e togliendone l'a^3, da tutti gli termini, si averà la medesima ragione, espressa in 42 : $88\sqrt{2} - 123$; che è eguale a quella di 5250 : 179. prendendo per radice di 2. il numero 1. 414. Che è quello, che si andava cercando.

AVVERTIMENTO.

Dovendosi perciò calcolare una Volta a vela tronca, o sia senza reguglio, di prima specie, essendo dato uno de' lati del quadrato sopra del quale è formata la detta Volta devesi.

I. Multiplicare la lunghezza, per la larghezza; cioè fare il quadrato del dato lato, e moltiplicarlo per il sesto, ed il prodotto si noti,

II. Si trovi un quarto proporzionale, dopo li due numeri costanti 5250, 179, ed il detto prodotto, e si noti.

III. Finalmente si sommi il detto quarto proporzionale, col prodotto della lunghezza, per la larghezza, e per la grossezza della cima; la somma sarà il valore della solidità di detta Volta.

Sia, per esempio, NP = 20, ed essendo di prima specie, sarà PQ = 20; ed il sesto $aS = 10$; e la grossezza della cima sia 1.; il parallelepido, che ha per base NQ, e per altezza Oy, il quale si ha moltiplicando il quadrato di 20, per 10, sarà 4000, Indi

dopo li due numeri costanti 5250, 179, ed il detto prodotto 4000, si trovi il quarto proporzionale $136\frac{3}{2\,7}$, a questo aggiuntovi il paralleleppipedo, che ha la medesima base con detta Volta, ed ha per altezza la grossezza della cima, il quale sarà 400: la somma $536\frac{8}{2\,1}$. sarà la solidità di detta Volta.

Della solidità dello sferoide depresso.

DEFINIZIONE.

Se la Ellissi ACBD, si facci girare attorno all' asse minore AB, fisso, ed immobile, fintantocchè giunge nel medesimo luogo d' onde si è partita, il solido generato da una tale rivoluzione, si chiamerà *sferoide depresso*. *Tav. II. Fig. 18.*

AVVERTIMENTO.

Il diametro maggiore CD, colla rivoluzione della Ellissi ACBD, attorno all' asse minore AB, descriverà un circolo, il di cui raggio è OD, metà di CD; E' facile il comprendere, che ogni altra ordinata all'asse minore AB, parallela ad OD, descriverà ancora un cerchio, il di cui raggio è la stessa ordinata. Da ciò ne segue, che tutte le sezioni, che si fanno nello sferoide depresso, le quali siano perpendicolari alla Ellissi generatrice, e le communi loro sezioni siano le

ordinate parallele all' asse maggiore, saranno circoli; e questi saranno concentrici tra loro, poicchè gli centri di essi si troveranno nell' asse minore AB.

TEOREMA I.

Le sezioni fatte nello sferoide depresso, le quali intersecandosi colla Ellissi generatrice, le communi loro sezioni non siano parallele all' asse maggiore, le dette sezioni saranno Ellissi.

Tav. II Fig. 18. S' Interseca lo sferoide depresso ACBD, per il piano FGEH, qualunque, eccetto di quelli espressi nell' avvertimento precedente. Dico, che la figura FGEH, sia Ellissi.

Per l' asse AB, si faccino passare gli due piani ACBD, AIBK (gli quali attento alla generazione di detto solido, saranno Ellissi) questi s' intersecano colla sezione EGFH, e le communi loro sezioni saranno le linee GH, LN; Così ancora questi piani segnaranno, colle loro sezioni, nel circolo CEDI, le linee CD, IK, FE. Essendo le due figure ACBD, AIBK, Ellissi, per la proprietà di esse, si avrà

$$\overline{AO}^2 : \overline{CI}^2 = \overline{OD}^2 : \text{rett. CPD},$$

e permutando $\overline{AO}^2 : \overline{OD}^2 = \overline{GP}^2 ;$ rett. CPD,

Così ancora si averà $\overline{AO}^2 : \overline{OK}^2$, ovvero $\overline{DO}^2$ come raggio dello stesso cerchio CEDI, Come $\overline{ML}^2$: rett. IMK ; Onde

$\overline{GP}^2$: rett. CPD = $\overline{ML}^2$: rett. IMK (*a*),

Ma rett. CPD = rett. FPE ; e rett. IMK = rett. FME (*b*) ;

Dunque $\overline{GP}^2$: rett. FPE = $\overline{ML}^2$. rett. FME, e permutando

$\overline{GP}^2 : \overline{ML}^2$ = rett. FPE : rett. FME,

della stessa maniera si può dimostrare di ogni altra ordinata applicata sopra EF, ed essendo questa una proprietà della Ellissi ; perciò la sezione FGEII, sarà Ellissi. Ciocchè doveasi dimostrare.

COROLLARIO.

Essendo FGEII, una Ellissi, si averà per sua proprietà, che

$\overline{GP}^2 : \overline{LM}^2 = \overline{PE}^2$: rett. FME,

e permutando

$\overline{GP}^2 : \overline{PE}^2 = \overline{LM}^2$: rett. FME ;

Così ancora

$\overline{AO}^2 : \overline{OK}^2 = \overline{LM}^2$: rett. IMK, ovvero al suo eguale rett. FME ;

(a) *Prop.* 11. *lib.* 5.
(b) *Prop.* 35. *lib.* 3.

Sicchè dunque $\overline{GP}^2 : \overline{PE}^2 = \overline{AO}^2 : \overline{OK}^2$ (*a*), e $GP : PE = AO : OK$ (*b*); e per conseguenza la Ellissi FGEH, sarà simile alla Ellissi AIBK, ovvero ad ACBD (*c*).

TEOREMA II.

Tav. II. Fig. 19. Se gli due coni ABC, FBG, che hanno la stessa altezza OB, siano intersecati da un piano parallelo alla base AC. Dico, che il cono tronco ADEC, stia al cono tronco FHIG, come $\overline{OC}^2 : \overline{OG}^2$

Il cono ABC; sta al cono FBG, come il cerchio AC, al cerchio FG (*d*), ovvero come $\overline{OC}^2 : \overline{OG}^2$ (*e*). Della stessa maniera, il cono DBE, sta al cono HBI, come $\overline{PE}^2 : \overline{PI}^2$

Inoltre $BP : PE = BO : OC$,
permutando $BP : BO = PE : OC$;
Così ancora $BP : BO = PI : OG$;
Onde $PE : OC = PI : OG$, (*f*)
e permutando $PE : PI = OC : OG$,
e si averà ancora $\overline{PE}^2 : \overline{PI}^2 = \overline{OC}^2 : \overline{OG}^2$ (*g*)

On-

(a) *Prop.* 9. *lib.* 5.
(b) *Prop.* 22. *lib.* 6.
(c) *Avvert.* 1. *Teor.* 4. *Cap.* 1.
(d) *Prop.* 11. *lib.* 12.
(e) *Prop.* 2. *lib.* 12.
(f) *Prop.* 11. *lib.* 5.
(g) *Prop.* 22. *lib.* 6.

Onde anche il cono ABC, sta al cono FBG, come il cono DBE, al cono HBI, e permutando il cono ABC, sta al cono DBE, come il cono FBG, al cono HBI, e dividendo, il cono tronco ADEC, starà al cono DBE, come il cono tronco FHIG, al cono HBI, e permutando, il cono tronco ADEC, sta al cono tronco FHIG, come il cono DBE, al cono HBI. Ma il cono DBE, sta al cono HBI, come $\overline{OC}^2 : \overline{OG}^2$. Dunque il cono tronco ADEC, sta al cono tronco FHIG, come $\overline{CO}^2 : \overline{OG}^2$. Ciocchè dovea-si dimostrare.

TEOREMA III.

La solidità dello sferoide depresso, sta alla solidità della sfera, il di cui diametro è l' asse minore dello sferoide, come il quadrato dell' asse maggiore, al quadrato dell' asse minore.

Sia ACBD, lo sferoide depresso, ed AEBF, la sfera, che ha per diametro l' asse minore AB. Dico, che lo sferoide ACBD, stia alla sfera AEBF, come $\overline{CO}^2 : \overline{EO}^2$. *Tav. III. Fig. 20.*

Si prolunghi l' asse minore BA, verso G; e per lo punto G, qualunque nel detto prolungamento, tirisi la GL, tangente nel cir-

co-

colo AEBF (*a*), e dal punto del contatto L, si abbassi la perpendicolare LI, sopra l'asse prolungato; Indi la LI, si prolunghi verso H, e K, che interseca la Ellissi ACBD, negli punti H, e K, dal punto G, al punto H, tirisi la GH, la quale sarà tangente della Ellissi ACBD (*b*).

Si unisca il punto G, con li punti K, ed M, per mezzo delle rette GK, GM; e concepiscasi la hn, infinitamente vicina alla HK; ed essendo queste infinitamente vicine, gli archetti Hh, Ll, Mm, Kn, si confonderanno colle porzioni delle tangenti GH, GL, GM, GN, e perciò gli detti archetti si potranno prendere come rette; Sicchè colla rivoluzione della Ellissi ACBD, e del cerchio AEBF, attorno all'asse AB, fisso, ed immobile; gli piccioli archetti, considerati come rette, una colle loro rispettive ordinate abbassate dagli estremi di essi descriveranno gli coni tronchi hHKn, lLMm, nel mentre che la Ellissi, ed il cerchio descrivono lo sferoide depresso, e la sfera.

Cio posto $\overline{ho} : \overline{lo} = \overline{CO} : \overline{EO}$ (*c*),

sarà ancora $\overline{ho^2} : \overline{lo^2} = \overline{CA^2} : \overline{EO_2}$ (*d*)

Ma $\overline{ho^2} : \overline{lo^2}$, come il cono tronco hHKn, al

(a) *Prop.* 17. *lib.* 3.
(b) *Teor.* 2. *Cap.* 2.
(c) *Corol.* 1. *Teor.* 3. *Cap.* 1.
(d) *Prop.* 22. *lib.* 6.

al cono tronco HLMm (*a*) ; Dunque il cono tronco hHKn , sta al cono tronco HLMm , come $\overline{CO}^2 : \overline{BO}^2$. Inoltre se intendesi tutto lo sferoide diviso per questi piani infinitamente vicini l' uno , all' altro , sempre si avrà , che il cono tronco , che si genera nello sferoide colla sua rivoluzione , stia al cono tronco , che gli corrisponde nella sfera, come $\overline{CO}^2 : \overline{EO}^2$; Sicchè dunque la somma di tutti gli coni tronchi generati nello sferoide , ch' è lo stesso sferoide , starà alla somma di tutti gli coni tronchi corrispondenti nella sfera , cioè alla sfera stessa , come il quadrato del semiasse CO , maggiore , al quadrato di EO , ovvero AO , semiasse minore. Cioc-chè dovcasi dimostrare .

COROLLARIO I.

Col medesimo raziocinio si dimostra , che il segmento HAK , dello sferoide , sta al segmento sferico LAM , come il quadrato del semiasse maggiore CO , al quadrato del semiasse minore AO ; ovvero come l' intero sferoide alla intera sfera .

CO-

(a) *Teor. precedente.*

COROLLARIO II.

Così ancora lo sferoide ACBD, sta alla sfera AEBF, come gli equimultiplici de' segmenti corrispondenti nello sferoide, e nella sfera.

COROLLARIO III.

Essendosi dimostrato, che il segmento HAK, dello sferoide, sta al segmento sferico LAM, come ; $\overline{CO}^2$: $\overline{EO}^2$; ma $\overline{CO}^2$: $\overline{EO}^2 = \overline{HI}^2 : \overline{LI}^2$ (*a*) ; dunque il segmento sferoidico HAK, sta al segmento sferico LAM, come $\overline{HI}^2 : \overline{LI}^2$, ovvero come $\overline{KH}^2 : \overline{LM}^2$.

COROLLARIO IV.

Essendo il cono HOK, al cono LOM, come il cerchio il di cui raggio è HI, al cerchio il di cui raggio è LI (*b*) ovvero come $\overline{HI}^2$, ad $\overline{LI}^2$ (*c*), oppure come $\overline{CO}^2 : \overline{AO}^2$; ma in questa stessa ragione è il segmento HAK, al segmento LAM, dunque il cono HOK, sta al cono

(a) *Corol. I. Teor.* 3. *Cap.* 1.
(b) *Prop.* 11. *lib.* 12.
(c) *Prop.* 2. *lib.* 12.

no LOM; come il segmento HAK, al segmento LAM; permutando, e componendo, il settore OHAK, dello sferoide, sta al settore OLAM, della sfera, come il segmento HAK, al segmento LAM, ovvero come lo sferoide ACBD, alla sfera AB. Sicchè il settore sferoidico, sta al settore sferico corrispondente, come lo sferoide, alla sfera, oppure come il quadrato dell'asse maggiore, al quadrato dell'asse minore.

AVVERTIMENTO I.

Si descriva il circolo AKB; col raggio AH, metà dell'asse maggiore AB, della Ellissi AIBP, ed il circolo albP, col raggio, della metà dell'asse minore, e facendosi girare gli detti due cerchi, e la Ellissi, attorno all'asse minore IP, fisso, ed immobile, gli due cerchi descriveranno due sfere, e la Ellissi uno sferoide depresso. Ciò posto nel circolo minore albP, s'intende inscritto il quadrato fN, si uniscano indi gli punti H, ed F, per mezzo delle retta HF, e questa prolungata incontrerà l'altra linea circolare nel punto D, e per esso tirisi la DL, parallela ad FN, e come questa è lato del quadrato inscritto nel cerchio albP, così la DL, sarà lato del quadrato inscritto nel cerchio AKB, e con questo lato compiscasi il quadrato hL; Indi si prolungano gli lati fF, iN, T. II. fig. 21.

FN, dall'una, e l'altra parte, e comecchè questi sono paralleli all'asse maggiore AB, andaranno ad incontrare gli punti, C, M, m, g (*a*) e sarà la figura gCMm, un rettangolo inscritto nella Ellissi AIBP. Posto ciò, s'intendono alzate sopra le rette gC, mM, DL, Il, FN, fi, altritanti piani tutti perpendicolari alla Ellissi AIBP; quello che passa per DL, nella sfera AKB, segnerà un circolo, e nello sferoide AIBP, una Ellissi (*b*), l'asse maggiore della quale sarà DL; e l'asse minore CM; e la metà Cc, dell'asse minore sarà ordinata della Ellissi generatrice (*c*), quale Ellissi nata dalla detta sezione sarà simile alla totale (*d*). Concepiscasi ora diviso il segmento sferico FbN, in un numero di piani infinitamente vicini l'uno all'altro, e paralleli tra loro, e dal centro H, agli estremi degli diametri di queste sezioni, si tirino altrettante rette, le quali prolungate intersecano la sfera AKB, e per tali punti d'intersezioni s'intendono tirati altri piani tutti paralleli a quelli di prima, verrà il segmento sferoidico CBM, diviso in egual numero infinito di piani, di quello ch'è diviso il segmento sferico FbN, qual pia

(a) *Teor.* 5. *Cap.* 1.
(b) *Teor.* 1. *Cap.* 6.
(c) *Coroll. Teor.* 5. *Cap.* 1.
(d) *Coroll. Teor.* 1. *Cap.* 6.

iani segnaranno nello sferoide tante Ellissi si-
nili, e comecchè queste sono come gli qua-
rati degli assi maggiori (*a*), o siano le sut-
si, che segnano le dette sezioni nel seg-
nento DBL, così gli cerchi, che segnano
e prime sezioni nel segmento FbN, sono
ome gli quadrati de' diametri (*b*); Ma cia-
cuna di quelle ellissi nel segmento sferoidico
BM, sta al suo cerchio corrispondente nel
gmento sferico FbN, come il semiasse mag-
iore Dc, al semiasse minore FE (*c*), ovve-
o Cc, e siccome le ordinate nel cerchio
KB sopra il diametro AB sono proporzio-
ali alle ordinate nella Ellissi AIB (*d*),
osì gli detti cerchi si trauno proporziona-
alle dette Ellissi. Dunque la somma di
tte le Ellissi segnate dalle infinite sezio-
fatte nel segmento sferoidico CBM, sta
la somma di tutti gli cerchi segnati dal-
infinite sezioni fatte nel segmento sferico
bN, e corrispondenti alle prime sezioni,
me la somma degli infiniti quadrati degli
si maggiori, o siano semisuttese del segmen-
DBL, alla somma degli iufiniti quadrati
' diametri de' cerchi segnati nel segmento
bN; ma ciascuno de' primi quadrati; sta e

cia-

(a) *Avvert.* 1. *Teor* 4. *Cap.* 1.
(b) *Prop.* 2. *lib.* 12.
(c) *Teor.* 3. *Cap.* 1.
(d) *Corol.* 1. *Teor.* 3. *Cap.* 1.

ciascuno de' secondi quadrati, come $\overline{HD}^2$: $\overline{HF}^2$, ovvero come $\overline{HK}^2$ ad $\overline{HI}^2$, oppure come lo sferoide AIBP, alla sfera aIbP, (*a*); Dunque la somma di tutte l'Ellissi segnate dalle infinite sezioni fatte nel segmento sferoidico CBM, sta alla somma di tutti gli cerchi segnati dalle infinite sezioni fatte nel segmento sferico FbN, corrispondente alle prime, come lo sferoide AIBP, alla sfera aIbP, e prendendosi le dette sezioni per elementi del segmento sferoidico CBM, e dello sferico FbN si averà in conseguenza, che la somma dicesse sarà il segmento sferoidico; ed il segmento sferico; e perciò il segmento sferoidico CBM, sta a quello sferico FbN, come lo sferoide totale AIBP, alla sfera aIbP.

AVVERTIMENTO II.

Tav. III. fig. 22. Se lo sferoide depresso si seca per un piano il quale passa per l'asse maggiore della Ellissi generatrice, e gli sia perpendicolare l'asse minore; la detta sezione per la natura di detto solido sarà il cerchio AKBG, ed il detto piano taglierà la sfera, il di cui diametro è l'asse minore della Ellissi generatrice in due parti eguali e la sezione segnerà il circolo albl, il quale sarà base dello Emisfero alb ed il cerchio AKBG, sarà base dello semisferoide depresso AIB, se dentro gli due cer-

cl

(a) *Teor.* 3. *Cap.* 6.

chi AKBG, lchi, s' inscrivono i due quadrati GDKQ, lchi e sopra di essi s' innalzano i due parallelepipedi DP, eR, i quali abbiano per altezza la No, metà di ch, lato del quadrato inscritto nel circolo massimo della sfera, che ha per diametro l'asse minore della Elissi generatrice. Siccome il parallelepipedo eR, tagha dell' Emisfero aIb, il segmento IIE, il quale è duplo di ciascuno de' semisegmenti laterali (*a*), così il parallelepipedo DP, taglia dallo semisferoide depresso AIB, il segmento gIC, ed i quattro semisegmenti GADg, DSKM, KBQC, QTGO; ed il solido semisferoide depresso, meno il detto segmento, e quattro semisegmenti, sarà l' anima della Volta a vela di seconda specie; la pianta della quale sarà il quadrato DQ, e sopra i quattro lati GD, DK, KQ, QG, vi saranno erette le quattro semiellissi GgD, DMK, KCQ, QOG (*b*).

(a) *Probl. Cap. 6.*
(b) *Teor. I. Cap. 6.*

TEOREMA IV.

Il parallelepipedo circonscritto all'anima della Volta a vela tronca di seconda specie, sta al solido parallelepipedo cavo la detta anima, nella ragione di 5250: 179.

Tav. III. Fig. 22. Sia AIB, un semisferoide depresso, tagliato da un piano, che passa per l'asse maggiore; e sia alb, l'Emisfero, il di cui diametro sia l'asse minore della Ellissi generatrice; e ne' circoli AKBG, ahbl, basi del semisferoide, e dell'Emisfero vi siano inscritti i quadrati DKQG, chil, sopra de' quali vi siano innalzati i parallelepipedi DP, eR, i quali abbiano per altezza la metà del lato del quadrato inscritto nel circolo, ch'è base dell'Emisfero; il parallelepipedo DP, taglierà dal semisferoide AIB, il segmento glC, ed i quattro semisegmenti GADg, DSKM, KBQC, QTGO (*a*); Ciò posto, il segmento glC, sferoidico, sta al segmento sferico flF, come lo sferoide totale, alla intiera sfera (*b*), ovvero come lo semisferoide AIB, all'Emisfero alb; ed il semisegmento GADg, sferoidico, sta al semisegmento sferico

(a) *Avvert. 2. Teor. 3. Cap. 6.*
(b) *Corol. 1. Teor. 3. Cap. 6.*

co laef, come lo semisferoide AIB all' Emisfero alb (*a*); onde la somma de' quattro semisegmenti sferoidici GADg, DSKM, KBQC, QTGO, più il segmento gIC, sta alla somma de' quattro semisegmenti sferici corrispondenti, più il segmento fIF, come lo semisferoide AIB all' Emisfero aIb (*b*); e permutando, ed invertendo, lo semisferoide AIB, starà alli quattro semisegmenti sferoidici più il segmento gIC, come lo Emisfero aIb, alli quattro semisegmenti sferici, più il segmento fIF; e convertendo, lo semisferoide AIB, starà allo semisferoide, meno i detti quattro semisegmenti, e segmento: cioè al solido GDKQOgMC, come lo Emisfero aIb, all' Emisfero, meno i detti quattro semisegmenti, e segmento, cioè al solido *lehinfoF*; e permutando, lo semisferoide, sta all' Emisfero, come il solido GDKQOgMC, al solido *lehinfoF*; ma lo semisferoide AIB, sta all' Emisfero aIb come $\overline{AB}^2$ $\overline{ab}^2$ (*c*); ovvero come DKQG, ad ehil, essendo quelli dupli di questi; e DQ: ei, come il parallelepipedo DP, al parallelepipedo eR (*d*); dunque il solido parallelepipedo DP, sta al parallelepipedo eR, come il solido GDKQOg-

(a) *Avvert. I. Teor. 3. Cap. 6.*
(b) *Corol. 2. Teor. 3. Cap. 6.*
(c) *Teor. 3. Cap. 6.*
(d) *Teor. per lem. del Teor. 33. lib. 11.*

MC, al solido *lehimfoF*; e permutando, il parallelepipedo DP, sta al solido GDKQOg-MC, come il parallelepipedo eR, al solido *lehimfoF*, e convertendo, il parallelepipedo DP, starà al medesimo parallelepipedo meno il solido GDKQOgMC, o sia meno l'anima della Volta, come il parallelepipedo eR, allo stesso parallelepipedo, meno l'anima della Volta sferica; ma il parallelepipedo eR, sta al solido *feohFiml*, come 5250: 179 (*a*). Dunque il parallelepipedo, DP, sta alla solidità della Volta a vela senza reguglio di seconda specie gDMKCQOG, come 5250: 179. Ciocchè doveasi dimostrare.

AVVERTIMENTO. I.

Per avere il valore della solidità di una Volta a vela senza reguglio di seconda specie, la pianta della quale sia quadrata, e gli archi sopra i lati del detto quadrato siano Ellittici, devesi tenere lo stesso metodo detto nella Volta sferica, posto nell'avvertimento del problema di questo Capitolo.

AVVERTIMENTO II.

Tav. III. Fig. 22. Si è dimostrato nel Teorema precedente, che il parallelepipedo DP, sta al solido GDKQ-

(a) *Propl. Cap. 6.*

KQOgMC, come il parallelepipedo eR, al solido *lehinfoF*; Onde anche i loro dupli saranno proporzionali, e si avrà, che il duplo parallelepipedo DP, stia allo intiero sferoide depresso, meno i sei segmenti, che il detto parallelepipedo taglia, come il cubo formato sopra il lato eh, del quadrato inscritto nel circolo massimo della sfera, il di cui diametro è l'asse minore della Ellissi generatrice, alla sfera meno i sei segmenti, che il detto cubo taglia. Ciò posto, intendesi ora intersecato il detto sferoide depresso per un piano che passa per l'asse minore, la sezione sarà la Ellissi APBI, la quale sarà eguale alla Ellissi generatrice del detto sferoide depresso, e i due parallelepipedi mG, iR, i quali sono eguali a quelli detti nel Teorema precedente, taglieranno lo semisferoide, e lo Emisfero, in segmenti proporzionali allo sferoide, ed alla sfera; ed in semisegmenti, i quali saranno eguali tra loro; e con quelli sferici, proporzionali collo detto sferoide, e colla descritta sfera. Perciò facendo uso dello stesso raziocinio detto nel Teorema precedente, si avrà, che il parallelepipedo mG, starà allo semisferoide depresso, dedottine i quattro semisegmenti, e lo intiero segmento verso il polo, come il parallelepipedo iR, allo Emisfero, meno i quattro semisegmenti, e segmento corrispondente a quello del semisferoide; Onde convertendo, si

Tav. III. Fig. 21.

avrà, chè il parallelepipedo mG, sta al medesimo parallelepipedo, meno il semisferoide tronco, come il parallelepipedo iR, allo stesso parallepipedo, meno lo Emiefero tronco; ma il parallelepipedo iR, sta al parallelepipedo, meno lo Emisfero tronco, come 5250 : 179 (a); dunque il parallelepipedo mG, sta allo stesso parallelepipedo, meno il semisferoide tronco, come 5250: 179. Ma questa sezione fatta nello sferoide depresso per un piano, che passa per l'asse maggiore, e gli sia perpendicolare l'asse minore, darà un altra Volta a vela senza reguglio di terza specie, la quala sarà formata sopra il rettangolo mC, e gli archi eretti sopra i lati maggiori di detto rettangolo, mM, gC, saranno semicerchi, e gli altri archi formati sopra i lati minori gm, CM, saranno semiellissi, gli assi minori delle quali, saranno li stessi lati gm, Cm, e gli semiassi maggiori, le metà de' detti lati maggiori gC, mM, Sicchè dunque per avere il valore di una Volta a vela, senza reguglio di terza specie, devesi fare la stessa operazione di quella, per avere la solidità della Volta di prima specie descritta nell' avvertimento del problema di questo Capitolo.

Del-

(a) *Probl. ap. 6.*

Della solidità dello sferoide lungo.

TEOREMA V.

Sia ADB, una semiellissi, il di cui asse maggiore sia AB, e sopra di esso descrivasi il semicerchio ACB; e concepiscasi tanto la semiellissi, quanto il semicerchio girare attorno l'asse maggiore AB; dalla semiellissi si genererà uno sferoide, e dal semicerchio una sfera. Dico, che la sfera, starà allo sferoide, come il quadrato dell'asse maggiore, ch'è diametro della sfera, al quadrato dell'asse minore, ovvero come i quadrati degli semiassi. *Tav. II. Fig. 11. n. 1.*

Per lo punto G, qualunque preso nel prolungamento dell'asse maggiore AB, si tiri una tangente al semicerchio ACB (*a*), e sia GM, e dal punto del contatto M, si abbassi l'ordinata MO, all'asse maggiore AB, che seca la semiellissi ADB, nel punto N, si unisca poi il punto G, col punto N, per mezzo della retta GN, questa sarà tangente della semiellissi ADB (*b*). Indi concepiscasi tirata l'altra ordinata mo, infinitamente vicina alla MO; ed essendo gli archetti Mm, Nn, infinitamente piccioli, questi si confon-

I 4 de-

(a) *Prop. 17. lib. 3.*
(b) *Teor. 2. Cap. 2.*

deranno colle porzioni delle tangenti GM, GN, e perciò si potrannò ptendere per lineole rette; Onde colla rivoluzione del semicerchio, e della semiellissi attorno all'asse maggiore AB, fisso, ed immobile, quello descriverà una sfera, e questa uno sferoide, e gli due archetti presi per linee rette Mm, Nn, formeranno due coni tronchi; se intendesi diviso tanto la sfera, quanto lo sferoide, nell'infinito numero di questi coni tronchi, questi saranno elementi della sfera, e dello sferoide; Onde la somma corrispondente alla sfera, sarà la solidità di essa, e quella nello sferoide, sarà la di lui solidità; ma ciascuno cono tronco nello sferoide, sta al cono tronco corrispondente nella sfera, come $\overline{MO}^2 : \overline{NO}^2$ (*a*), ovvero come $\overline{CP}^2 : \overline{DP}^2$; e la somma de' primi, starà allo somma de' secondi, come uno de' primi, al suo corrispondente negli secondi (b), ovvero come $\overline{CP}^2 : \overline{DP}^2$. Dunque ancora la sfera, che ha per diametro l'asse maggiore AB, come somma degl' infiniti primi coni tronchi, sta allo sferoide, la semiellissi generatrice del quale è ADB, ed è somma degl' infiniti secondi coni tronchi, come $\overline{CP}^2 : \overline{DP}^2$, ovvero come

(a) *Teor. 2. Cap. 6.*
(b) *Prop. 12. lib. 5.*

ne $\overline{AP}^2 : \overline{DP}^2$. Ciocchè doveasi dimostrare.

COROLLARIO I.

Da ciò ne segue, che qualunque segmento della sfera, diviso per un piano perpendicolare alla Ellissi generatrice, e parallelo all' asse minore, sta al segmento corrispondente nello sferoide, come il quadrato di DP, al quadrato di AP, ovvero come la sfera, allo sferoide.

COROLLARIO II.

SUppongasi il cerchio AKBL, la Ellissi AlBP, ed il cerchio albP, girare attorno all' asse maggiore AB, fisso, ed immobile, i due cerchi formeranno due sfere, e la Ellissi uno sferoide lungo. Chiamasi la sfera, il di cui diametro è AB, asse maggiore dello sferoide, S; la sfera il diametro della quale sia l' asse minore IP, dicasi s; e lo sferoide generato dalla Ellissi AlBP, denominasi Sf. Si avrà per il Teorema precedente, che *Tav. I. Fig. 5.*

$$S : Sf = \overline{AB}^2 : \overline{IP}^2$$

Moltiplicando per AB

Si avrà, che $S : Sf = \overline{AB}^3 : \overline{IP}^2 \times AB$;

ma $S : s = \overline{AB}^3 : \overline{IP}^3$ (a);

Dun-

(a) *Prop. 18. lib. 22.*

Dunque ordinando Sf : s = $\overline{IP}^2$ A×B : $\overline{IP}^3$
e dividendo per IP.

Si avrà, che Sf : s = IP×AB : $\overline{IP}^2$
Sicchè dunque lo sferoide, sta alla sfera, il di cui diametro è l' asse minore del detto sferoide, come il rettangolo fatto dall' asse maggiore, e l' asse minore di esso sferoide, al quadrato circonscritto al circolo massimo della detta sfera; e comecchè l' enunciato rettangolo, sta al detto quadrato, come l' asse maggiore, all' asse minore. Dunque lo sferoide, sta alla sfera, che ha per diametro l'asse minore, come l' asse maggiore, all'asse minore dello stesso sferoide.

COROLLARIO III.

Tav. I. Fig. 5. Per il Corollario I, il segmento yAd, sferico, sta al segmento sferoidico gAc, come $\overline{AB}^2$: $\overline{IP}^2$, e moltiplicando l' uno, e l'altro termine della seconda ragione per AB, si avrà, che

seg: yAd : seg: gAc = $\overline{AB}^3$: $\overline{IP}^2$×AB;

ma seg: yAd : seg: fah = $\overline{AB}^3$: $\overline{IP}^3$ (*a*)
essendo simili tra loro
Dunque ordinando

seg: gAc : seg: fah = $\overline{PI}^2$×AB : $\overline{IP}^3$;
e di-

(a) *Corol. I. prop. 63. de Sphaer. , et Cyl. Caravelli.*

dividendo l'uno, e l'altro termine per IP;

avrà seg: gAc: seg: fah = IP×AB: $\overline{IP}^2$.

cchè dunque il segmento sferoidico, sta al gmento corrispondente nella sfera, il di cui ametro sia l'asse minore dello sferoide, co- e il rettangolo fatto dall'asse maggiore, e ll'asse minore del detto sferoide, al quadra- circonscritto al circolo massimo della det- sfera, ovvero come lo sferoide totale, al- intiera sfera.

COROLLARIO IV.

Essendosi dimostrato, che tanto lo sferoide nerato dalla rivoluzione della Ellissi AlBP, ia alla sfera, il diametro della quale sia asse minore del detto sferoide, quanto il gmento sferoidico, al suo corrispondente nel- detta sfera, stia come il rettangolo fatto ll'asse maggiore, e minore del detto sferoi- , al quadrato circonscritto al cerchio mas- mo della detta sfera; ma il rettangolo cG, scritto nella Ellissi generatrice è la metà el rettangolo fatto dall'asse maggiore, e mi- ore (*a*), ed il quadrato hF; inscritto nel rcolo massimo della sfera, che ha per dia- etro l'asse minore, è la metà del quadra- circonscritto. Dunque lo sferoide generato lla rivoluzione della Ellissi AlBP, sta al-

la-

(a) *Corol. Teor. 6. Cap. 1.*

la sfera generata colla rivoluzione del cerchi
albP, come il rettangolo cG, al quadrat
hF; ed in questa stessa ragione saranno gl
segmenti sferoidici a quelli sferici corrispon
denti. Onde ancora lo semisferoide, sta all
Emisfero, come il rettangolo inscritto nell
Ellissi generatrice, al quadrato inscritto ne
circolo, il diametro del quale è l'asse mi
nore.

AVVERTIMENTO

Tav.II Fig.23. Sia DMCe, il rettangolo inscritto nell Ellissi AIBP, generatrice dello sferoide, qua le rettangolo si ha prolungando i due lat mn, iN, del quadrato in, inscritto nel cir co'o, il diametro del quale è l'asse minor della detta Ellissi; sopra il rettangolo Mc ed il quadrato in, s'intendono innalzati due parallelepipedi MO, iL, i quali abbian per altezza comune, la metà del lato del qua drato in, e comecchè il parallelepipedo iL taglia dallo Emisfero quattro semisegmenti ed il segmento dfbg, il quale è duplo d ciascuno de' detti semisegmenti, così ancora il parallelepipedo MO, taglierà dal semisfe roide, quattro semisegmenti, i quali saran no eguali tra loro, per essere nella stessa ragione con quelli sferici, di quella che ha lo sferoide, alla sfera, generati dalla detta Ellis si, e dal detto cerchio, siccome si è dimo-

stra-

rato, e taglierà ancora il detto parallelepipedo O, il segmento, la base del quale è la Ellissi abcd, il quale sarà duplo di ciascuno dei etti semisegmenti. Il solido semisferoide tronco IbCcedDa, cioè dedottine i quattro semisegenti, ed il segmento verticale, sarà l'anima della Volta a vela tronca di quarta specie, quale sarà formata sopra il rettangolo DMCe, sopra i lati minori DM, Ce, vi saranno nalzati gli archi DaM, Cce, i quali saran semicircolari, e sopra i lati maggiori vi ranno erette le semiellissi MbC, Dde, che r la natura, e generazione del detto sferoi saranno tali gli detti archi; siccome ha mostrato *Guarino Guarino* nel suo Euclide.

TEOREMA VI.

Il parallelepipedo MO; sta al medesimo rallelepipedo, meno l'anima della Volta a la senza reguglio di quarta specie, cioè alquattro piramidi mistilinee aMb, bCc, ced, Da, nella ragione di 5250 : 179. *Tav.* II. *Fig.* 23.

Lo semisferoide generato colla rivoluzione della issi AIBP, sta allo emisfero generato colla rilnzione del cerchio mnNi, come il rettangolo CeD, al quadrato i Nnm (*a*): inoltre il semigmento sferoidico MPCb, sta al semisegmensferico iPNb, come lo semisferoide, allo Emi-

(a) *Corol. 4. Teor. 5. Cap. 6.*

Emisfero (*a*); ed il semisferoide, sta allo Emisfero, come gli equimultiplici de' segmenti (*b*); ma gli equimultiplici nello sferoide sono, i quattro semisegmenti MPCb, CBec, eIDd, DAMa, ed il segmento, che ha per base la Ellissi abcd, e nello Emisfero, i quattro semicerchi ibN, Ngn, ndm, mfi ed il segmento, che ha per base il cerchio dflbg. Dunque lo semisferoide, sta allo Emisfero, come i detti quattro semisegmenti, e segmento sferoidici, alli descritti quattro semisegmenti, e segmento sferici, e permutando, lo semisferoide, sta alli quattro semisegmenti, e segmento sferoidici, come la sfera, alli quattro semisegmenti, e segmento sferici; e convertendo, lo semisferoide, starà allo detto semisferoide, meno i quattro semisegmenti, e segmento sferoidici, cioè alla detta anima di Volta a vela senza reguglio di quarta specie, come lo Emisfero, allo stesso Emisfero, meno i quattro semisegmenti e segmento sferici, cioè all'anima della Volta a vela senza reguglio di prima specie; e permutando, lo semisferoide, sta allo Emisfero, come l'anima della Volta a vela senza reguglio di quarta specie, all'anima della Volta a vela senza reguglio di prima specie

m

(a) *Corol. 3. Teor. 5. Cap. 6.*
(b) *Corol. 2. Teor. 3. Cap.*

na lo semisferoide, sta allo Emisfero, come tettangolo MCeD, al quadrato iNnm; ed rettangolo Me, sta al quadrato Nm, come parallelepipedo MO, al parallelepipedo iL z); dunque il parallelepipedo MO, sta al arallelepipedo iL, come l'anima della Vol- a vela senza reguglio di quarta specie, l'anima della Volta a vela senza reguglio i prima specie, e permutando, il parallele- ipedo MO, sta all'anima della Volta a ve- senza reguglio di quarta specie, come il arallelepipedo iL, all'anima della Volta sfe- ca, e convertendo, il parallelepipedo MO, a alla solidità della Volta a vela senza re- glio di quarta specie, come il parallelepi- edo iL, alla solidità della Volta sferica sen- reguglio; ma il parallelepipedo iL, sta la solidità della Volta sferica senza regu- io, come 5250 : 179 (*b*); dunque ancora parallelepidedo Mo, starà alla solidità del- Volta a vela senza reguglio di quarta spe- , come 5250 : 179. Ciocchè doveasi di- ostrare.

AVVERTIMENTO.

Per evere il valore della solidità di una lta a vela senza reguglio di quarta specie, la

(a) *Prop. 32. lib. 11.*
(b) *Probl. Cap. 6.*

la quale sarà covertura di un edificio di pianta rettangolare, e sopra i quattro lati vi saranno eretti i quattro archi, che sostengono la detta Volta, cioè sopra i lati minori, gli archi saranno semicircolari, e sopra i lati maggiori saranno semiellittici, devesi fare la stessa operazione detta nell' avvertimento del problema di questo Capitolo.

AVVERTIMENTO II.

Tav. II. Fig. 23. Essendo dimostrato nel Teorema precedente, che il parallelepipedo MO, sta allo semisferoide tronco aMbCcedDa, come il parallelepipedo iL, allo Emisfero tronco ibNgndmfi, i loro dupli saranno proporzionali; onde il duplo parallelepipedo MO, starà allo sferoide tronco, come il duplo parallelepipedo iL, o sia il cubo formato sopra il lato iN, del quadrato inscritto nel cerchio, il di cui diametro è l'asse minore, alla sfera tronca. Ora se intendesi diviso lo sferoide per un piano, il quale passi per l'asse minore, e ad esso gli sia perpendicolare l'asse maggiore questo piano siccome divide il cubo, e la sfera in due parti eguali, così divide ancora il parallelepipedo, e lo sferoide in due parti eguali, e da questa sezione si genera la quinta specie della Volta a vela senza regu-

Tav. III. Fig. 24. glio, la quale sarà formata sopra il quadrato bdfe, e sopra i quattro lati df, fe, eb

sa

saranno eretti quatro archi, li quali saranno quattro semiellissi bCd, dDf, fAe, eBb, gli assi minori delle quali, saranno gli detti lati del quadrato; E perciò si averà ancora, che il parallelepipedo bQ, starà allo semisferoide tronco BbCdDfAeB, o sia all' anima della Volta a vela senza reguglio di quinta specie, come il parallelepipedo ba, allo Emisfero tronco, o sia all' anima della Volta sferica, essendo questi mettà de'totali, siccome si è dette; e convertendo, il parallelepipedo bQ, sta alla solidità della Volta a vela senza reguglio di quinta specie, come il parallelepipedo ba, alla solidità della Volta a vela sferica senza reguglio; ma il parallelepido ba, sta alla solidità della Volta a vela sferica, come 5250: 179 (a); Dunque il parallelepipedo bQ, sta alla solidità della Volta a vela senza reguglio di quinta specie, come 5250: 179. Sicchè dunque essendo dato il lato del quadrato, sopra del quale è formata la detta Volta, ed essendo dato il sesto, e la grossezza della cima, si potrà avere il suo valore della solidità, facendo uso della regola descritta nell'avvertimento del problema di questo Capitolo.

(a) *Probl. Cap.* 6.

Della solidità dello Ellittoide.

DEFINIZIONE

(Tav. III. Fig. 25)

Sia ABCD, una Ellissi, e sopra l'asse minore BD, s' intenda eretta un' altra Ellissi BEDF, la quale abbia uno de' suoi assi commune coll' asse della prima Ellissi. Se per gl' infiniti punti della Ellissi ABCD, si facino passare infinite Ellissi, le quali siano simili alla BEDF, e parallele, il solido composto dall' aggregato di tutte queste Ellissi, si chiamarà *Ellittoide*.

Egli è chiaro, che nello Ellittoide vi saranno tre assi, cioè uno commune alle due Ellissi generatrici di detto solido, e sarà BD, e gli altri due saranno delle Ellissi medesime, cioè AC, ed EF; e comecchè questi assi sono disuguali tra loro, perciò si dirà asse maggiore quello, che è maggiore degli altri due, e minore quello, ch'è minore degli altri due rimanenti.

AVVERTIMEMTO.

Dalla formazione di un tal solido è facile il comprendere, che qualunque sezione, che si fa in esso deve essere una Ellissi.

TEO-

TEOREMA VII.

La Ellittoide, sta alla sfera, che ha per diametro l'asse minore dello Elittoide, come il rettangolo circonscritto alla Ellissi, sezione di detto Ellittoide per l'asse maggiore, al quadrato circonscritto al cerchio massimo della detta sfera.

(Tav. III. Fig. 25.)

Sia ABCD, una sezione dello Ellittoide, la quale passi per l'asse minore BD; e sia AECF, la sezione, che passa per l'asse maggiore EF. Dico, che lo Ellittoide, sta alla sfera, che ha per diametro l'asse minore BD, come il rettangolo di EF, in AC, al quadrato di BD.

S'Intende diviso lo Ellittoide in un numero infinito di piani, tutti paralleli ad AECF, e siccome nello Ellittoide questi piani segnaranno altrettante Ellissi, così nella sfera notarà l'infinito numero di cerchi; e prendendosi gli primi come elementi dello Ellittoide, gli secondi saranno elementi della sfera. Ma ciascuna di quelle Ellissi, cioè MNm, sta a ciascuno de' cerchi gih, come il rettangolo di No, in Mm, al quadrato

di gh (*a*) ; ovvero come il rettangolo di Nn, in nm , al quadrato di nh ; Ma Nn , sta al EO , come in : IO (*b*) ; ed mn, stà a CO, come nh : OH. Dunque ancora la Ellissi MNmo , sta al cerchio gih , come il rettangolo di EO , in OC , al quadrato di OH , ovvero come il rettangolo di EF , in AC , al quadrato di GH. È questo ha luogo in tutte le Ellissi, elementi del detto Ellittoide, ed in tutti gli cerchi corrispondenti, li quali sono elementi della detta sfera ; Dunque la somma di tutte le Ellissi , sta alla somma di tutti gli cerchi , come il rettangolo di EF , in AC , al quadrato di BD : ma la somma di dette Ellissi sarà lo Ellittoide , e la somma degli detti cerchi sarà la sfera ; Dunque lo Ellittoide , sta alla sfera , che ha per diametro l' asse minore , come il rettangolo di EF , AC , circonscritto alla Ellissi AECF , al quadrato di BD , circonscritto al circolo massimo della sfera , che ha per diametro l' asse minore. Ciocchè doveasi dimostrare.

COROLLARIO I.

Da quelche si è dimostrato , se ne deduce, che il segmento MBm , dello Ellittoide, sta al

(a) *Avvert. Teor.* 6. *Cap.* 1.
(b) *Corol.* 1. *Teor.* 3. *Cap.* 1.

al segmento sferico gBh, come il rettangolo circonscritto alla Ellissi AECF, al quadrato circonscritto al cerchio massimo della sfera, che ha per diametro l'asse minore; ovvero come lo Ellittoide, alla sfera

COROLLARIO II.

Ed essendo il rettangolo inscritto nella Ellissi, la mettà del rettangolo ad essa circonscritto (*a*), ed il quadrato inscritto nel cerchio la mettà del quadrato circonscritto; Dunque ancora lo Ellittoide, starà alla sfera, che ha per diametro l'asse minore, come il rettangolo inscritto nella Ellissi AECF, al quadrato inscritto nel circolo massimo della detta sfera; e nella stessa ragione saranno gli segmenti.

COROLLARIO III.

Chiamasi S, la sfera, il diametro della quale sia l'asse maggiore EF, dello Ellittoide; e la sfera BGDH, dicasi s, il diametro della quale sia l'asse minore BD; e lo Ellittoide ABCDEF, denominasi EL; Si averà per lo Teorema precedente, che

(a) *Corol. Teor.* 6. *Cap.* 1.

$EL : s = EF \times AC ; BD^2$.

Moltiplicando per BD

Si averà, che $EL : s = EF \times AC \times BD : BD^3$,

e permutando $EL : EF \times AC \times BD = s : BD^3$.

Inoltre $s : S = BD^3 : EF^3$ (a),

permutando $s : BD^3 = S : EF^3$;

ma $s : BD^3 = EL \times AC \times BD$;

Dunque $EL : EF \times AC \times BD = S : EF^3$

E permutando $EL : S = EF \times AC \times BD : EF^3$

dividendo per EF.

si averà, che $EL : S = AC \times AC \times BD : EF^2$.

Sicchè dunque lo Ellittoide, sta alla sfera, il di cui diametro è l'asse maggiore, come il rettangolo fatto dall'asse medio, e minore, al quadrato dell'asse maggiore.

COROLLARIO IV.

(Tav. II, fig. 26)

Sia AKBL, un cerchio il di cui diametro AB, sia l'asse maggiore di un Ellittoide, la sezione del quale sia la Ellissi aKbL; e doep, sia un cerchio il di cui diametro sia l'asse minore del detto Ellittoide, e l'asse medio sarà ab. Il segmento sferico yKD, della sfera generata colla rivoluzione del cerchio AKBL, chiamasi S; il segmento, mon del-

(a) *Prop.* 18. *lib.* 12

della sfera generato colla rivoluzione del cerchio doep, denominasi s, ed il segmento gKG, dello Ellittoide dicasi S. EL; intersecati siano gli detti segmenti nella maniera, che osservasi nella figura 26. Si averà, che il segmento sferico yKD, sta al segmento gKG, dello Ellittoide aKbL, come la sfera AKBL, allo Ellittoide; Ma la detta sfera, sta allo Ellettoide, come $AB^2 : ab \times de$ (*a*)

Dunque $S : S.EL = AB^2 : ab \times de$

Moltiplicando per AB

si averà, che $S : S.EL = AB^3 : ab \times de \times AB$,

e permutando $S : AB^3 = S.EL : ab \times de \times AB$;

Ma $S : s = AB^3 : de^3$ (*b*),

permutendo $S : AB^3 = s : de^3$;

Dunque $s : de^3 = S.EL : ab \times de \times AB$,

e permutando $s : S.EL = de^3 : ab \times de \times AB$

dividendo per de,

Si averà, che $s : S.EL = de^2 : ab \times AB$

Siccome dunque gli segmenti dello elettoide, li quali nascono da sezioni parallele all' asse minore, staranno alli segmenti corrispondenti della sfera, il di cui diametro è l' asse minore, come il rettangolo fatto dall' asse maggiore, e medio, al quadrato dell' asse minore, ovvero

(*a*) *Corol precedente.*
(*b*) *Prop.* 15. *lib.* 12

come lo Ellitoide totale, alla intiera sfera, oppure come il rettangolo inscritto nella Ellissi, sezione che passa per l'asse maggiore, alla quale gli sia perpendicolare l'asse minore, al quadrato inscritto nel circolo massimo, che ha per diametro l'asse minore.

COROLLARIO V.

Col medesimo raziocinio si può dimostrare, che qualunque porzione di sfera, stia alla sua corrispondente nello ellittoide, come il quadrato circonscritto al cerchio massimo, al rettangolo circonscritto alla detta ellissi, ovvero come il rettangolo fatto dal diametro, e dal raggio del cerchio massimo, alla metà del rettangolo circonscritto alla detta ellissi.

AVVERTIMENTO.

(Tav. III. fig. 27.)

Se s' intende lo Ellittoide diviso per un piano, che passa per l'asse maggiore AB, e l'asse minore sia perpendicolare al detto piano; la sezione sia la Ellissi AgBh; e la sezione della sfera, il di cui diametro è l'asse minore, sia il cerchio QTSR, dentro del quale si concepisca inscritto il quadrato TR; e nella Ellissi AgBh, vi sia inscritto il rettangolo GEFH, e s' intendono innalzati due parallelepipedi sopra il quadrato TR, ed il rettangolo EH, gli quali abbiano per altezza com-

commune la mettà del lato del quadrato inscritto nel cerchio QTSR; siccome il parallelepipedo innalzato sopra il quadrato TR, taglia dallo Emisfero quattro semisegmenti eguali tra loro, ed un segmento verticale, il quale è duplo di ciascuno de'detti semisegmenti; così ancora il parallelepipedo eretto sopra il rettangolo EH, taglierà dallo Ellittoide quattro semisegmenti eguali, ed il segmento verticale, il quale sarà duplo di ciascuno de' detti semisegmenti; per essere questi, a quelli, come lo ellittoide, alla sfera, siccome si è dimostrato ne Corollarii precedenti. Il solido ellittoide tronco MENFOHPGM, sarà l'anima della scsta specie di Volta a vela senza reguglio; la quale sarà di pianta rettangolare, e gli quattro archi, che sostengono la detta Volta saranno ellittici.

TEO-

TEOREMA VIII.

Il parallelepipedo, che ha la medesima base, e la stessa altezza coll' anima della Volta di sesta specie, sta al parallelepipedo medesimo dedottane la detta anima di Volta, o sia alla solidità di detta Volta di sesta specie, come 5250 : 179.

(Tav. III. Fig. 27.)

Li quattro semisegmenti GME, ENF, FOH, HPG, dello Ellittoide, stanno alli quattro semisegmenti sferici QoT, TqS, SrR, RpQ, come lo semiellittoide, all'emisfero (*a*); ed il segmento verticale PMNO, dello Ellittoide, sta al segmento sferico verticale poqr, anche come lo semiellittoide, all'emisfero. Onde la somma de' quattro semisegmenti dello semiellittoide, più il segmento verticale, sta alla somma de' quattro semisegmenti sferici, più il segmento verticale, come lo semiellittoide, all'emisfero; e permutando, ed invertendo, si averà, che lo semiellittoide, starà alli detti quattro semisegmenti, e segmento verticale dello Ellittoide, come l'Emisfero, alli quattro semisegmenti sferici, più il segmento verticale, e con-

(*a*) *Corol.* 1. *Teor.* 7. *Cap.* 6.

convertendo, lo semiellittoide starà, al detto semiellittoide meno gli detti quattro semisegmenti, e segmento verticale dello Ellittoide, come l'emisfero, allo detto emisfero, meno li quattro semisegmenti sferici, e segmento verticale; Ma il detto semiellittoide dedottine gli detti quattro semisegmenti, e segmento verticale, è l'anima della Volta a vela di sesta specie MENFOHPGM; e l'Emisfero toltine gli detti quattro semisegmenti sferici, e segmento verticale, è l'anima delle Volta a vela sferica oTqSrRpQo; Dunque lo semiellittoide, sta all'anima della Volta MENFOHPGM, come l'emisfero, all'anima della Volta sferica oTqSrRpQo; e permutando, lo semiellittoide, sta allo Emisfero come l'anima della Volta di sesta specie, all'anima della Volta sferica; ma lo semiellittoide, sta all'Emisfero come il rettangolo GEFH, al quadrato QTSR (*a*); ed il rettangolo GKFH, sta al quadrato QTSR, come il parallelepipedo EC, al parallelepipedo Tm (*b*); Dunque il parallelepipedo EC, sta al parallelepipedo Tm, come l'anima MENFOHPGM, della Volta di sesta specie, all'anima oTqSrRpQo; della Volta a Vela sferica; e permutando, il parallelepido EC, sta alla detta anima di Volta di sesta specie, co-

(a) *Corol.* 2. *Teor.* 7. *Cap.* 6.
(b) *Prop.* 32. *lib.* 11.

come il parallepipedo Tm, all' anima di Volta sferica ; e convertendo , il parallelepipedo EC, sta al detto parallelepipedo , dedottane la detta anima di Volta di sesta specie , cioè alla sua solidità MEaNFbOHCPGdM , come il parallelepipedo Tm : alla solidità della Volta sferica ; ma il parallelepipedo Tm, sta alla solidità della Volta a vela sferica come 5250 : 179 (*a*); Dunque il parallelepipedo EC , sta alla solidità della Volta a vela senza reguglio di sesta specie, come 5250: 179. Ciocchè doveasi dimostrare.

COROLLARIO.

Da ciò si è dimostrato, si rileva il metodo di conoscere il valore della solidità della Volta a vela senza reguglio di sesta specie, facendo uso della stessa regola detta nelle altre.

AVVERTIMENTO I.

Il detto ellittoide è capace di due altre sezioni , cioè per un piano , che passa per l'asse medio gh, al quale gli sia perpendicolare l' asse maggio AB ; e per un piano , che passa per l'asse minore YL, al quale gli sia perpendicolare l'asse medio gh; e da queste sezioni ne nasceranno due altre specie di Vol-

(a) *Prob. Cap.* 6.

Volta a vela senza reguglio, le quali saranno
i pianta rettangolare, e sopra gli quattro lati
el detto rettangolo saranno erette quattro se-
niellissi simili a quelle, delle quali il detto
olido vien generato ; e la solidità di dette
olta si averà della stessa maniera delle altre.

AVVERTIMENTO II.

Sicchè dunque qualunque Volta a vela sen-
reguglio , di qualsivoglia specie sia , si
otrà avere il valore della sua solidità, es-
ndo cognita la lunghezza , la larghezza, il
sto degli archi , che la sostengono , e la
rossezza della cima , facendo la seguente
gola , cioè.

I. Si moltiplica la lunghezza , per la lar-
ezza, e per il sesto, ed il prodotto si noti.

II. Ritrovasi un quarto proporzionale, do-
gli due numeri costanti 5250, 179 , ed
detto prodotto , e si noti.

III. Finalmente si unisca il detto quarto
oporzionale , col prodotto della lunghezza,
r la larghezza, e per la grossezza della ci-
; la somma sarà il valore della solidità
detta Volta, in parti cubiche dell'aliquo-
commune.

CO-

COROLLARIO.

Essendosi dimostrato, che in qualunque specie di Volta a vela senza reguglio, il solido che ha la medesima base, e la stessa altezza con detta volta, sta alle piramidi mistilinee, come 5250 : 179; ed essendo le dette piramidi, le incosciature di dette Volte Dunque il solido parallelepido, che ha la medesima base, e la stessa altezza colla Volta a vela senza reguglio, sta alle quattro incosciature di essa, come 5250 : 179.

CAP

CAP. VII.

Della superficie delle varie specie di Volta a vela senza reguglio.

DEFINIZIONE.

Per superficie di Volta a vela senza reguglio s' intende la superficie concava di detta Volta.

PROBLEMA I.

Trovare la ragion, che passa tra la superficie laterale di un parallelepipedo, che ha la medesima base, e la stessa altezza con la Volta a vela sferica, e la superficie di detta Volta.

(Tav. II. Fig. 17.)

Sia la Volta sferica INSPKQTRI; trovala ragione, che passa tra la superficie laterale del parallelepipedo, che ha per base quadrato NQ, e per altezza, aS, mettà il lato del quadrato, e la superficie di detta Volta.

Sia NP = PQ = a; sarà NQ = Ln $\sqrt{2}a$; ed nK = $\frac{\sqrt{4a^2 - 2a^2}\sqrt{2}}{}$;

ed $aS = uK = Oy = Oa = OV = \frac{a}{2}$;

sarà ancora $OP = ON = OL = \frac{V_{2a^2}}{2}$;

ed $LV = By = LO - OV = \frac{V_{2a^2}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{V_{2a^2} - a}{2}$ Onde la superficie dello

Emisfero sarà $= \frac{22}{7} \overline{V_{2a}}^2 \times \frac{V_{2a^2}}{2} = \frac{22}{7} a^2$.

Le quattro superficie de'semisegmenti laterali NMPS, PnQK, QXRT, RLNI, siccome si è detto nel problema Capitolo VI. sono eguali a $\frac{22}{7}$ ($2a^2 V_2$ e la superficie del segmento ISKTB $= \frac{11}{7}$ ($2a^2 - a^2 V_2$); Onde la somma de' detti quattro semisegmenti, e segmento ISKTB $= \frac{33}{7}$ ($2a^2 - a^2 V_2$) sicchè la superficie dello Emisfero tronco, o sia dello Emisfero dedottine le superficie de detti quattro semisegmenti, ed il detto segmento, vale a dire la somma delle superficie de' quattro triangoli sferici INS, SPK, KQT TRI $= \frac{22}{7} a^2 - \frac{33}{7}$ ($2a^2 + a^2 V_2 = \frac{3}{7}$ $a^2 V - 3 \frac{44}{7} a^2$.

aggiuntovi il cerchio ISKT $= \frac{11}{14} a^2$

Si averà la superficie della Volta a vela senza reguglio di prima specie NISPKQTRI = $\frac{33}{7}\ a^2\ \sqrt{2} - \frac{44}{7}\ a^2 + \frac{11}{14}\ a^2 = \frac{66}{14}\ a^2\ \sqrt{2} - \frac{88}{14}\ a^2 + \frac{11}{14}\ a^2 = \frac{66}{14}\ a^2\ \sqrt{2} - \frac{77}{14}\ a^2$

La superficie laterale del parallelepipedo, che ha per base il quadrato NQ, e per altezza $aS = 4^a \times \frac{a}{2} = \frac{4a^2}{2} = 2a^2$;

Sicchè dunque la superficie laterale del parallelepipedo, che ha per base il quadrato NQ, e per altezza aS, sta alla superficie della Volta sferica senza reguglio, come $2a^2 : \frac{66}{14}a^2\sqrt{2} - \frac{77}{14}\ a^2$; ovvero come $28a^2 : 66a^2\sqrt{2} - 77a^2$ e dividendo tutti gli termini per a^2 ; si averà, che la superficie laterale dal parallelepipedo, che ha la medesima base, e la stessa altezza con la Volta a vela sferica, stia alla superficie di detta Volta, come $28 : 66\sqrt{2} - 77$, ovvero come 28 : 16. 324 ; oppure come 28000 : 16324 ; ch' è lo stesso di 1000: 583. Ciocchè si andava cercando.

AVVERTIMENTO.

Per avere il valore della superficie della Volta a vela sferica senza reguglio, o sia di prima specie, essendo cognita la lunghezza, la larghezza, ed il sesto, devesi.

I. Summare la dupla lunghezza, e la dupla larghezza, e questa moltiplicarla per il

sesto ed il prodotto si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 1000, 583, ed il detto prodotto si trovi un quarto proporzionale; questo sarà la superficie di detta Volta. —

Sia, per esempio, una volta a vela sferica senza reguglio, la di cui larghezza NP, sia 20, ed essendo sferica sarà PQ = 20; ed il sesto aS = 10; la somma de' quattro lati NP, PQ, QR, RN, sarà 80; la quale moltiplicata per il sesto 10, il prodotto sarà 800; Indi dopo li due numeri costanti 1000, 583, ed il detto prodotto 800, trovisi un quarto proporzionale $466\frac{2}{3}$, questo sarà il valore della superficie della data Volta a vela sferica senza reguglio.

Della superficie dello sferoide depresso.

TEOREMA I.

(Tav. II. fig. 19.)

Se il Cono ABC, sia diviso dal piano DE parallelo alla base. Dico, che la superficie del Cono ABC, stia alla superficie del Cono DBE, come le sezioni di essi, che passano per l'asse, cioè come il triangolo ABC, al triangolo DBE.

La superficie del cono ABC, sta alla su-

per-

perficie del cono DBE, come AC^2 ; DE^2 (*a*); ma $AC^2 : DE^2$, come il triangolo ABC, al triangolo DBE (*b*), essendo simili; Dunque la superficie del cono ABC, sta alla superficie del cono DBE, come il triangolo ABC, al triangolo DBE. Ciocchè doveasi dimostrare.

COROLLARIO.

Essendo la superficie del cono ABC, alla superficie del cono DBE, come il triangolo ABC, al triangolo DBE, convertendo si avrà la superficie del cono ABC, alla superficie del cono tronco ADEC, come il triangolo ABC, al trapezio ADEC.

TEOREMA II.

Sia FBG, un'altro cono, che abbia l'asse BO, di commune col cano ABC, e sia diviso dal piano DE, parallelo alla base AC, dico, che la superficie del cono ABC, sia alla supercie del cono FBG, come la superficie del cono tronco ADEC, alla superficie del cono tronvo FHIG.

La superficie del cono ABC, sta alla superficie del cono DBE, come il triangolo

(a) *Corol. 2 prop. 4 de sphæ. et Cyl. Caravelli.*
(b) *Prop.* 19, *lib.* 6.

ABC, al triangolo DBE (*a*); e della stessa maniera, la superficie del cono FBG, sta alla superficie del cono HBI, come il triangolo FBG, al triangolo HBI. Inoltre il triangolo ABC, sta al triangolo FBG, come AC : FG (*b*), ed triangolo DBE, sta al triangolo HBI, come DE : HI; Ma

AC : DE = BO : BP; per le parallele DE, AC; ed

FG : HI = BO : BP;

Dunque AC : DE = FG : HI, e per conseguenza il triangolo ABC, sta al triangolo DBE, come il triangolo FBG, al triangolo HBI. Sicchè dunque anche la superficie del cono ABC, starà alla superficie del cono DBE, come la superficie del cono FBG, alla superficie del cono HBI (*c*); e convertendo, la superficie del cono ABC, sta alla superficie del cono tronco ADEC; come la superficie del cono FBG, alla superficie del cono tronco FHIG; e permutando, la superficie del cono ABC, sta alla superficie del cono FBG, come la superficie del cono tronco ADEC, alla superficie del cono tronco FHIG. Ciocchè doveasi dimostrare.

(a) *Teor. precedente.*
(b) *Prop.* 1. *lib.* 6.
(c) *Prop.* 11. *lib.* 5.

COROLLARIO.

Essendo la superficie del cono ABC, alla superficie del cono tronco ADEC, come il triangolo ABC, al trapezio ADEC (*a*); e la superficie del cono FBG, alla superficie del cono tronco FHIG, come il triangolo FBG, al trapezio FHIG. Dunque permutando, ed ordinando, la superficie del cono tronco ADEC, sta alla superficie del cono tronco FHIG, come il trapezio ADEC, al trapezio FHIG.

TEOREMA III.

La superficie dello sferoide depresso, sta alla superficie della sfera, che ha per diametro l'asse minore, come l'asse maggiore, all' asse minore.

(Tav. II. fig, 20.)

Sia ACBD, una Ellissi, il di cui asse minore sia AB, ed AEBF, sia un cerchio, che abbia per diametro l'asse minore AB, e sia HG, una tangente della Ellissi, la quale si vada ad unire coll' asse minore prolungato nel punto G; e dal punto H, si abbassi la ordinata HI, all'asse AB, la quale s'interseca

(2) *Coroll. 4, Teor. 2. Cap. 3.*

colla circonferenza del cerchio nel punto L, e tirandòsi la GL, questa sarà tangente del cerchio AEBF (*a*); Si concepisca un' altra ordinata ho, infinitamente vicina alla HI; ed essendo le due GH, GL, tangenti della Ellissi, e del cerchio, gli piccioli archetti Hh, Ll, si confonderanno con le lincette Hh, Ll, porzioni delle tangenti, e perciò si potranno prendere per linee infinitamente picciole. Indi s'intende tanto la Ellissi, quanto il cerchio girare attorno all'asse minore AB, fisso, ed immobile, fintantocchè giungono nel medesimo luogo d'onde son partite; la Ellissi con una tal rivoluzione generarà uno sferoide depresso, il cerchio una sfera, e le lincette Hh, Ll, due coni tronchi; ma la superficie del cono tronco HhnK, sta alla superficie del cono tronco LlmM, come il trapezio HhnK, al trapezio LlmM (*b*); e gli trapezj HhnK, LlmM, non differiscono dagli rettangoli fatti da hn, in Hh, e da lm, in Ll, essendo le ordinate infinitamente vicine tra loro; Onde il trapezio HhnK, sta al trapezione LlmM, come hn, ad lm, ovvero come ho: lo, oppure come CO: EO (*c*); Sicchè dunque la superficie del cono tronco HhnK, sta alla superficie del cono tronco LlmM, co-

(a) *Teor.* 2, *Cap.* 2.
(b) *Corol. Teor. precedente.*
(c) *Corol.* 1, *Teor.* 3. *Cap. I.*

come CO : EO. Ciò posto, se tutto lo sferoide ACBD, sia diviso da infiniti piani, la sua superficie sarà composta da infinite corone coniche, e la sfera AEBF, sarà ancora composta da altrettante corone coniche; e comecchè ciascuna delle prime, sta a ciascuna corrispondente delle seconde, come CO : EO; Così la somma delle prime, che formano la intiera superficie dello sferoide, sta alla somma delle seconde, che formano la intiera superficie della sfera, come CO : EO (*a*), ovvero come CD : AB. Ciocchè doveasi dimostrare.

COROLLARIO I.

Da ciò si è dimostrato si rileva, che la superficie di un segmento HAK, dello sferoide, sta alla superficie del segmento LAM, della sfera, come il segmento ellittico HAK, al segmento circolare LAM; poicchè la somma delle corone coniche nel segmento sferoidico, sta alla somma delle corone coniche nel segmento sferico, come la somma de' trapezj, de' quali componesi il segmento HAK, alla somma de' trapezj, di cui componesi il segmento LAM; ma il segmento HAK, sta al segmento LAM, come CD, ad AB (*b*); ed in questa stessa ragione sarà la superficie del

(a) *Prop.* 12. *lib.* 5.
(b) *Corol.* 3. *Teor.* 3 *Cap.* 1.

segmento sferoidico HAK, a quella del segmento sferico LAM.

COROLLARIO II.

La superficie dello sferoide depresso, stando alla superficie della sfera, che ha per diametro l'asse minore AB, come l'asse maggiore CD, all'asse minore AB; ma CD; AB, come il segmento sferoidico HAK, al segmento sferico LAM; Sicchè dunque il segmento sferoidico HAK, sta al segmento sferico LAM, intersecati per piani paralleli all'asse maggiore, come la superficie dello sferoide totale, alla superficie totale della sfera.

COROLLARIO III.

(Tav. II. fig. 26.)

Chiamasi S, la superficie della sfera, il diametro della quale sia l'asse maggiore KL, di uno sferoide depresso, ed s, la superficie della sfera, il di cui diametro sia l'asse minore ab, dello stesso sferoide; e la superficie del detto sferoide denominasi S. sf. Si averà per lo Teorema precedente.

$$s : S.\ sf = ab : KL$$

Moltiplicando per ab

Si averà $s : S.\ sf = ab^2 : ab \times KL$,

e permutando $s : ab^2 = S.\ sf : ab \times KL$;

ma

ma $s : S = ab^2 : LK^2$ (a),
e permutando $s : ab^2 = S : KL^2$;
Dunque $S : KL^2 = S.\ sf : ab \times KL$,
e permutando $S : S.\ sf = KL^2 : ab \times KL$,
dividendo per KL
Si averà $S : S.\ sf = KL : ab$.

Sicchè dunque la superficie della sfera, che ha per diametro l'asse maggiore di uno sferoide depresso, sta alla superficie del detto sferoide, come l'asse maggiore, all'asse minore del sferoide.

COROLLARIO IV.

Dicasi S, la superficie del segmento sferico yKD, della sfera il di cui diametro sia l'asse maggiore KL, dello sferoide depresso; ed s, la superficie del segmento fIF, della sfera, il diametro della quale sia l'asse minore ab; così ancora dicasi S. sf, la superficie del segmento sferoidico depresso gKG; riducendo la sfera il di cui diametro è l'asse maggiore, e lo sferoide ne'loro elementi, e facendo lo stesso raziocinio detto nel Teorema precedente, si averà

$$S : S.\ sf = KL : ab$$

Mol-

(b) *Corol.* 2. *prop.* 24, *Theor. Archimedis, Andrea Tacquet.*

Moltiplicando per KL
Si averà S : S. sf = KL^2 : ab × KL :
e permutando S : KL^2 = S. sf : ab × KL.
Inoltre S : s = KL^2 : ab (a),
e permutando S : KL^2 = s : ab^2 ;
ma S · KL^2 = S. sf : ab × KL ;
Dunque s : ab^2 = S. sf : ab × KL,
e permutando s : S. sf = ab^2 : ab × KL
dividendo per ab
Si averà s : S. sf = ab : KL.

Sicchè dunque la superficie del segmento sferoidico depresso, intersecato da un piano perallelo all'asse minore, stà al segmento corrispondente della sfera, il diametro della quale è l'asse minore del detto sferoide, come l'asse maggiore, all'asse minore del detto sferoide depresso, ovvero come la superficie dello sferoide, a quella della sfera

COROLLARIO V.

(Tav. II. Fig. 2)

Essendo la superficie dello sferoide, alla superficse della sfera il di cui diametro è l'asse minoie, come CD : AB, ovvero come la Ellissi ACBD, al cerchio AEBF (*b*), permu-

(a) *Prop.* 5o *de Sphæ. et Cyl. Caravelli.*
(b) *Teor.* 3 *Cap.* 1.

mutando, si averà, che la superficie dello sforoide, sta alla Ellissi ACBD, come la superficie della detta sfera, al circolo massimo ABEF; ma la superficie della sfera è quadrupla del cerchio massimo (*a*); dunque la superficie dello sferoide depresso è quadruplo della Ellissi generatrice.

AVVERTIMENTO.

Per trovare una sfera, che abbia la sua superficie eguale a quella di uno sferoide depresso, basta ritrovare una media proporzionale tra l'asse maggiore, e l'asse minore, e questa sarà diametro della sfera, che si va cercando; poicchè il circolo avendo per diametro questa media proporzionale è eguale alla Ellissi generatrice dello sferoide depresso (*b*); dunque anche li loro quadrupli saranno eguali, e per conseguenza la superficie dello sferoide depresso sarà eguale alla superficie della sfera, che ha per diametro la media proporzionale tra gli assi conjugati.

PRO-

(a) *Prop.* 36. *de sphæ:*, *et Cyl. Caravelli.*
(b) *Teor.* 7. *Cap.* 1.

PROBLEMA II.

Trovare una formola generale per conoscere il valore della superficie di qualunque Volta a vela senza reguglio di seconda specie.

(Tav. III. fig. 22.)

Essendo la superficie del semisferoide depresso, alla superficie dell' Emisfero, che ha per diametro l'asse minore, come il semiasse maggiore, al semiasse minore (*a*), o sia di DH : eH; ma DH : eH = DL : eN (*b*) dunque la superficie del semisferoide AIB, sta alla superficie del detto Emisfero, come DL : eN; Inoltre la superficie del semisegmento sferoidico DSKM, sta alla superficie del semisegmento sferico eoh, come l'asse maggiore, all'asse minore (*c*), ovvero come DL : eN; ed in questa istessa ragione è la superficie del segmento verticale sferoidico OgMCI a quella del segmento sferico mfoF (*d*); Onde la somma delle superficie de' quattro semisegmenti sferoidici, che tagliano gli piani passando per li quattro lati del quadrato DQ, più la superficie del segmento sferoidico verticale OgMCI, starà alla somma

(a) *Teor.* 3. *Cap.* 7.
(b) *Schol.* 1. *prop.* 2. *lib.* 6.
(c) *Corol.* 4. *Teor.* 3. *Cap.* 7.
(d) *Corol. I. Teor.* 8. *Cap.* 7.

ma delle superficie de' quattro semisegmenti sferici corrispondenti, più la superficie del segmento sferico verticale, come DL: eN; Sicchè dunque la superficie del semisferoide depresso, sta alla superficie dell'Emifero, che ha per diametro l'asse minore, come la somma delle superficie de'detti quattro semisegmenti, più il segmento verticale dello sferoide, alla detta somma di superficie de'semisegmenti sferici, e segmento verticale; e permutando, e convertendo la superficie dello semisferoide, sta alla somma delle superficie de' quattro triangoli sferoidici gDM, MKC, CQO, OGg, come la superficie dell' Emisfero, alla somma delle superficie de'quattro triangoli sferici corrispondenti feo, ohF, Fim, mlf; e permutando, la superficie del semisferoide, sta alla superficie dello Emisfero, come la detta somma delle superficie de'quattro triangoli sferoidici, alla somma delle superficie de' detti quattro triangoli sferici; ma la superficie del semisferoide, sta alla superficie dell' Emisfero, come DL, ad eN, ovvero come la somma de' quattro lati del quadrato DQ, alla somma de'quattro lati del quadrato ei, oppure come il rettangolo, che ha per base la somma de'quattro lati del quadrato DQ, e per altezza QP, o sia la superficie laterale del parallelepipedo DP, alla superficie laterale del parallelepipedo eR, avendo eguali altezze; dunque la superficie laterale del parallelepipedo DP, sta alla

alla superficie laterale del parallelepipedo eR come la somma delle superficie de' quattro triangoli sferoidici, alla somma delle superficie de' quattro triangoli sferici, permutando, la superficie laterale del parallelepipedo DP, sta alla somma delle superficie de'quattro triangoli sferoidici, come la superficie laterale del parallelepipedo eR, alla somma delle superficie de' quattro triangoli sferici corrispondenti; ma la superficie laterale del parallelepipedo eR, sta alla somma delle superficie de'quatro triangoli sferici, come $2a^2 : \frac{33}{7}a^2\sqrt{2} - \frac{44}{7}a^2$, siccome rilevasi dal Problema I. di questo Capitolo ovvero come $14a^2 : 33a^2\sqrt{2} - 44a^2$; e dividendo tutti gli termini di detta ragione per a^2; si avrà, che la superficie laterale del parallelepipedo eR, sta alla somma delle superficie de' quattro triangoli sferici, come $14 : 33\sqrt{2} - 44$, ovvero, come 14: 2662; oppure come 14000: 2662; o sia come 7000: 1331; Sicchè dunque la superficie laterale del parallelepipedo DP, sta alla somma delle superficie de' quattro triangoli sferoidici, come 7000: 1331. Ciocchè doveasi cercare.

AVVERTIMENTO.

Per avere il valore della superficie di una Volta a vela senza reguglio di seconda specie, devesi.

I Mol-

I. Moltiplicare il perimetro del quadrato, che gli serve di base, per il sesto di detta Volta, ed il prodotto si noti.

II. Si trovi un quarto proporzionale dopo li due numeri costanti 7000, 1331, ed il detto prodotto, e si noti; questo sarà la summa delle superficie de' quattro triangoli sferoidici.

III. Dopo li due numeri costanti 14, 11, ed il quadrato, che gli serve di base, si trovi un quarto proporzionale, e si noti; e questo sarà il cerchio OgMC.

IV. Finalmente si uniscano gli detti due quarti proporzionali, e la di loro somma sarà il valore della superficie di detta Volta.

Sia data una Volta a vela di seconda specie, della quale se ne voglia sapere il valore della sua superficie, essendo cognito il lato del quadrato, che gli serve di base, e sia 15 ed il sesto sia 5; il prodotto della somma de' quattro lati, per il sesto, sarà 300. Dopo li due numeri costanti 7000, 1331, ed il detto prodotto 300, si trovi il quarto proporzionale $57\frac{3}{70}$, e questo sarà la somma delle superficie de' quattro triangoli sferoidici. Indi dopo li due numeri costanti 14, 11, ed il quadrato di 15, si trovi un'altro quarto proporzionale, che sarà $176\frac{11}{14}$. Finalmente si uniscano gli detti due quarti proporzionali, e la

di

di loro summa $233\frac{29}{35}$, sarà il valore della superficie della detta Volta.

TEOREMA IV.

La superficie della Volta sferica inscritta nella Volta a vela senza reguglio di terza specie, sta alla superficie di essa Volta, nella ragione della larghezza di detta Volta, alla di lei lunghezza.

(Tav. III. Fig. 21.)

Sia iNFf, la base della Volta sferica inscritta nella Volta di terza specie. Dico, che la superficie della Volta sferica, sta alla superficie della Volta di terza specie, come mg : mM,

La superficie dello semisferoide, sta alla superficie dell'Emisfero, come la superficie de'semisegmenti, che sono tagliati dalli piani eM, gG, alla superficie de'semisegmenti corrispondenti nella sfera, che ha per diametro l'asse minore(*a*); e permutando, la superficie dello semisferoide, sta alla superficie de'detti semisegmenti, come la superficie dell'Emisfero, che ha per diametro l'asse minore, alla superficie de'detti semisegmenti sferici. Così ancora la superficie dello semisferoide, sta alla superficie de'semisegmenti,

(*a*) *Corol.* 1. *Teor.* 3. *Cap.* 7.

ti, che sono tagliati dalli piani ge, MG, e del segmento tagliato da Ge, come la superficie dell' Emisfero, che ha per diametro l'asse minore, alli semisegmenti sferici corrispondenti (*a*). Onde la superficie del semisferoide, sta alla superficie de' quattro semisegmenti, che li quattro piani del parallelepipedo mG, taglia, più il segmento verticale, come la superficie dell' Emisfero, alla superficie de' quattro semisegmenti, più il segmento verticale corrispondente; e convertendo, la superficie del semisferoide, sta alla superficie del detto semisferoide, meno la superficie de'detti semisegmenti, e segmento; cioè alli quattro triangoli sferoidici, come la superficie dell' Emisfero, alla superficie de'quattro triangoli sferici; e permutando, la superficie del semisferoide, sta alla superficie dell' Emisfero, come la superficie de' quattro triangoli sferoidici, a quella de' quattro triangoli sferici; ma la superficie del semisferoide, sta alla superficie dell' Emisfero, come l'asse maggiore, all' asse minore (*b*), ovvero come mQ. iQ (*c*); Dunque la superficie de'quattro triangoli sferoidici, sta alla superficie de' quattro triangoli sferici, come mQ, ad iQ. Ciò posto, la Ellissi verticale 1, 2, sta al cerchio verticale

(a) *Corol. 4. Teor. 3. map. 7.*
(b) *Teor. 3. Cap. 7.*
(c) *Corol. 1. Teor. 3. Cap. 7.*

3, 4, come l' asse maggiore di detta Ellissi, all' asse minore (*a*), ovvero come mQ: iQ, oppure come la superficie de' quattro triangoli sferoidici, alla superficie de' quattro triangoli sferici; e permutando, e componendo, la superficie della Volta a vela di terza specie, sta alla superficie de' quattro triangoli sferoidici, come la superficie della Volta sferica, alla superficie de' quattro triangoli sferici, e permutando, la superficie della Volta a vela di terza specie, sta alla superficie della Volta sferica, come la superficie de' quattro triangoli sferoidici, alla superficie de' quattro triangoli sferici, ovvero come mQ: iQ, oppure come i loro dupli mM, ad iN, ovvero if. Ciocchè doveasi dimostrare.

AVVERTIMENTO.

Per avere il valore della superficie di una Volta a vela senza regnglio di terza specie, la quale sarà formata sopra un rettangolo, e gli archi eretti sopra i lati maggiori saranno semicerchi, e quelli sopra i lati minori semiellissi; devesi.

I. Moltiplicare la somma di quattro volte la larghezza mg, per la metà di essa, per avere a superficie laterale del parallelepipedo circonscritto alla Volta sferica, ed il prodotto si noti. II.

(a) *Teor. 3. Cap. 1.*

II. Dopo i due numeri costanti 1000, 583. ed il detto prodotto, si trovi un quarto proporzionale, questo sarà la superficie della volta sferica (*a*).

III. Finalmente dopo la larghezza, la lunghezza, e la detta superficie di Volta sferica, si trovi un quarto proporzionale, questo sarà la superficie della Volta di terza specie.

Sia, per esempio, data una Volta a vela di terza specie, e sia la larghezza 10, la lunghezza 24; si moltiplica la quadrupla larghezza 10, ch'é 40, per la metà di detta larghezza ch'è 5, ed il prodotto 200 si noti; si faccia come i due numeri costanti 1000 a 583, così il detto prodotto 200, al quarto proporzionale $116\frac{3}{5}$, e si noti; Indi dopo la larghezza 10, la lunghezza 24, ed il detto quarto proporzionale $116\frac{3}{5}$; si trovi il quarto proporzionale $279\frac{21}{25}$, questo sarà la superficie di detta Volta.

(a) *Avvert. Probl. 1. Cap. 7.*

Della superficie dello sferoide lungo.

TEOREMA V.

La superficie della sfera, che ha per diametro l' asse maggiore di uno sferoide, sta alla superficie dello sferoide lungo, nella ragione dell' asse maggiore, all' asse minore.

Tav. II. Fig. 26. Sia AKBL, un cerchio, ch' abbia per diametro l' asse maggiore KL, della Ellissi aKbL; e tanto il detto cerchio, quanto la Ellissi si faccino girare attorno l' asse maggiore KL, la Ellissi genererà uno sferoide lungo, nel tempo istesso, che il cerchio formerà una sfera, Dico, che la superficie della sfera che ha per diametro l' asse KL, sta alla superficie dello sferoide, come KL: ab.

La dimostrazione è la stessa di quella fatta nel Teorema III. di questo Capitolo.

COROLLARII.

Da ciò se ne deducono le istesse illazioni nel detto Teorema dimostrate, facendo uso delli stessi raziocinii, e sono le seguenti.

I. Che la superficie di un segmento sferico, sta alla superficie di un segmento sferoidico corrispondenti, intersecati da un piano pa-

parallelo all' asse minore, al qual piano gli sia perpendicolare l' asse maggiore come l' asse maggiore, all'asse minore, ovvero come la superficie sferica, alla superficie sferoidica.

II. Che la superficie della sfera, che ha per diametro l' asse minore, sta alla superficie dello sferoide lungo, come l' asse minore, all' asse maggiore; e nella stessa ragione saranno le superficie de' segmenti, e de' settori.

III. Che la superficie di un segmento di uno sferoide lungo, sta alla superficie del segmento sferico corrispondente nella sfera, che ha per diametro l' asse maggiore, quali segmenti siano intersecati da' piani parallelli all' asse maggiore; ed a questi gli sia perpendicolare l' asse minore, come l' asse minore, all' asse maggiore, ovvero come la superficie dello sferoide, a quella della sfera.

IV. Che la superficie dello sferoide lungo sia quadrupla della superficie della Ellissi generatrice.

V. Sicchè dunque la superficie di uno sferoide depresso sarà eguale alla superficie di uno sferoide lungo, essendo tanto l' uno, quanto l' altro generato da una istessa Ellissi.

TEOREMA VI.

La superficie della Volta sferica inscritta nella Volta a vela senza regnio di quarta specie, sta alla superficie di essa Volta, nella ragione della larghezza di essa Volta, alla sua lunghezza.

Tav. II. Fig. 23. Sia aMbCcedDa, la Volta a vela di quarta specie, e sia fibNgndmf, la Volta sferica, la quale sarà formata sopra un quadrato del lato minore del rettangolo, che è base della Volta di quarta specie. Dico, che la superficie di detta Volta sferica, sta alle superficie della Volta di già enunciata di quarta specie, come DM: MC.

La superficie dello semisferoide, sta alla superficie dell' Emisfero, che ha per diametro l' asse minore, come l' asse maggiore, all' asse minore (*a*); ed in questa istessa ragione saranno gli semisegmenti, i piani secanti de' quali sono DaM, ecC (*b*); e gli semisegmenti MPCb, Dled, ed il segmento il piano secante, del quale sia abcd (*c*), con li semiseg-

(a) *Corol. 2. Teor. 5. Cap. 7.*
(b) *Corol. 1. Teor. 5. Cap. 7.*
(c) *Corol. 3. Teor. 5. Cap. 7.*

segmenti, e segmento corrispondenti nella sfera; Onde la superficie dello semisferoide lungo, sta alla superficie dell' Emisfero, che ha per diametro l' asse minore, come la superficie de' quattro semisegmenti, e segmento dello sferoide, alla superficie de' quattro semisegmenti, e segmento corrispondenti nella sfera; e permutando, e convertendo, la superficie dello semisferoide, sta alla superficie de' quattro triangoli sferoidici aMb, bCc, ced, dDa, come la superficie dell' Emisfero, alla superficie de' quattro triangoli sferici fib, bNg, gnd, dmf; e permutando, la superficie dello semisferoide, sta alla superficie dell' Emisfero, come la superficie de' detti quattro triangoli sferoidici, alla superficie de' descritti quattro triangoli sferici; Ma la superficie dello semisferoide sta, a quella della sfera, il diametro della quale è l' asse minore, come l' asse maggiore, all' asse minore (*a*), ovvero come MC: iN, oppure come la Ellissi abcd, al cerchio fbgd (*b*); Dunque la superficie della Ellissi abcd, sta alla superficie del cerchio fbgd, come la superficie de' detti quattro triangoli sferoidici, alla superficie de' descritti quattro triangoli sferici; e permutando, e componendo, la superficie della Volta a vela di quarta specie, sta alla superficie della Volta

(a) *Corol. 2. Teor. 5. Cap. 7.*
(b) *Teor. 3. Cap. 1.*

a vela sferica, come la Ellissi abcd, al cerchio, fbgd, ovvero come MC : iN ; Sicchè dunque la superficie della Volta a vela sferica inscritta nella Volta a vela senza reguglio di quarta specie, sta alla superficie di essa Volta di quarta specie, come la larghezza, alla lunghezza di detta Volta. Giocchè doveasi dimostrare.

AVVERTIMENTO.

Per avere il valore della superficie di una Volta a vela senza reguglio, la quale sia formata sopra una pianta rettangolare, e gli archi eretti sopra i lati minori siano circolari, e quelli formati sopra i lati maggiori siano Ellittici, quale Volta dicesi di quarta specie; devesi fare quello stesso, che nell' Avvertimento Teor. IV. di questo Capitolo si è detto, cioè

I. Moltiplicare la quadrupla larghezza di essa Volta, per la metà di detta larghezza, per avere la superficie laterale del parallelepipedo circonscritto alla Volta sferica, ed il prodotto si noti.

II. Si trovi, dopo i due numeri costanti 1000, 583, ed il detto prodotto, un quarto proporzionale, questo sarà la superficie della Volta sferica, e si noti.

III. Finalmente si trovi un' altro quarto proporzionale, dopo la larghezza, la lunghezza

za di detta Volta data, e la notata superficie della Volta sferica; questo sarà la superficie della Volta di quarta specie.

TEOREMA VII.

La superficie laterale di un parallelepipedo circonscritto ad una Volta a Vela senza reguglio di quinta specie, sta alla somma delle superficie de' quattro triangoli sferoidici, o sia delle quattro incosciature di detta Volta, nella ragione di 7000: 1331.

Sia il parallelepipedo bQ, circonscritto alla Volta a vela di quinta specie eBbCdDfAe. Dico, che la superficie laterale di detto parallelepipedo bQ, sta alla somma delle superficie de' quattro triangoli sferoidici BbC, CdD, DfA, AeB, come 7000: 1331. *Tav. III. Fig. 24.*

Facendo lo stesso raziocinio de' Teoremi precedenti si avrà, che la superficie dello semisferoide, starà alla superficie dell' Emisfero, il di cui diametro è l' asse minore, come la somma della superficie de' quattro descritti triangoli sferoidici, alla somma delle superficie de' quattro triangoli sferici; Ma la superficie dello semisferoide, sta alla superficie dell'

dell' Emisfero, come l'asse maggiore, all'asse minore (*a*), ovvero come fQ: fa (*b*); oppure come la superficie laterale del parallelepipedo bQ, alla superficie laterale del parallelepipedo ba; Dunque la somma delle superficie de' quattro triangoli sferoidici BbC, CdD, DfA, AeB, sta alla somma delle superficie de' quattro triangoli sferici, come la superficie laterale del parallelepipedo bQ, alla superficie laterale del parallelepipedo ba, e permutando, ed invertendo, la superficie laterale del parallelepipedo bQ, sta alla somma delle superficie de' quattro triangoli sferoidici, come la superficie laterale del parallelepipedo ba, alla somma delle superficie de' quattro triangoli sferici, ma la superficie laterale del parallelepipedo ba, sta alla somma delle superficie de' quattro triangoli sferici come 7000: 1331. (*c*); Dunque la superficie laterale del parallelepipedo bQ, circonscritto alla Volta a vela di quinta specie, sta alla superficie delle incosciature di detta Volta come 7000 : 1331. Ciocchè doveasi dimostrare.

AVVERTIMENTO.

Per avere il valore della superficie di una Volta a vela senza reguglio, la quale sia formata

(a) *Corol. 2. Teor. 6. Cap. 7.*
(b) *Corol. 1. Teor. 3. Cap. 1.*
(c) *Probl. 2. Cap. 7.*

mata sopra una pianta quadrata, e gli archi, che la sostengono siano semiellittici, e gli assi minori siano i lati del detto quadrato, qual Volta dicesi di quinta speciè, devesi fare quello stesso, detto nell' Avvertimento Probl. II. di questo Capitolo, cioè

I. Moltiplicare il perimetro del quadrato; che gli serve di base, per il sesto di detta Volta, ed il prodotto si noti.

II. Trovare un quarto proporzionale dopo i due numeri costanti 7000, 1331, ed il detto prodotto, e si noti, questo quarto proporzionale sarà la somma delle superficie de' quattro triangoli sferoidici.

III. Trovare inoltre un' altro quarto proparzionale dopo i due numeri costanti 14, 11, ed il quadrato che gli serve di base, e si noti; e questo sarà il circolo ABCD.

IV. Finalmente si uniscano i detti due quarti proporzionali, e la di loro somma sarà il valore della superficie di detta Volta.

Della superficie dello Ellitoide.

DEFINIZIONI.

I. Sia AKCM, una Ellissi, il di cui asse maggiore sia AC, ed il minore KM, e sia il punto B, elevato da sopra detta Ellissi, dal quale si tiri una retta a qualunque punto del perimetro di detta Ellissi, e s' intenda la detta *Tav. III. Fig. 28.*

ta retta girare attorno a detto perimetro con uno estremo; e coll' altro fisso, ed immobile nel punto B, fintantocchè giunga nel medesimo luogo d' onde si è partita, il solido racchiuso da questa superficie AKCMB, si chiamerà *Cono Ellittico*; la Ellissi KCMA, sarà la sua *base*; ed il punto B, il *vertice*.

II. La retta BO, che unisce il vertice, col centro della Ellissi, che gli serve di base si dirà *asse*; se questo è perpendicolare alla base si chiamerà, *Cono retto*, e s' è obbliquo si dirà, *Cono Scaleno*.

AVVERTIMENTO.

Dalla generazione di questo solido è facile il comprendere, che tirandosi una retta dal vertice B, a qualunque punto del perimetro della base, giacerà questa nella superficie di detto cono, dal che si rileva, che qualunque sezione fatta nel detto cono, la quale passi per il vertice B, sia un triangolo; delle altre poi quelle, che sono parallele alla base, saranno della stessa natura della base: Una tal verità ben si comprenderà dal seguente.

TEO-

TEOREMA VIII.

Se un cono Ellittico s' interseca per un piano parallelo alla base, la sezione sarà una Ellissi, è questa sarà simile a quella della base.

Sia ABC, un cono Ellittico, e sia intersecato dal piano FLGN, parallelo alla sua base. Dico I. che la figura FLGN, sia Ellissi; II. che detto Ellissi secante sia simile a quella della base AKCM. *Tav. III. Fig 28.*

I. Si concepisca un' altro cono circolare, base del quale sia il cerchio DKEM, il diametro del quale sia l' asse minore KM, della Ellissi AKCM, ed abbia la comune altezza col cono Ellittico; s' intersechino i detti due coni, per due piani, i quali passino per il vertice B, e siano OBC, pBc, i quali per l' avvertimento precedente saranno triangoli, s' intersecheranno con i due piani paralleli AKCM, FLCN, e le di loro comuni sezioni oG, OC; ag, pc, saranno parallele (*a*), Onde si avrà, che

$$Bo : oG = BO : OC, \quad (b)$$

e per-

(a) *Prop. 16. lib 11.*
(b) *Prop. 4. lib. 6.*

e permutando BO : BO = oG OC

Della stessa maniera si avrà, che

Ba : Bp = ag : pc ;

Ma Ba : Bp = Bo : BO;

Dunque oG : OC = ag : pc ;

Ma alla stessa ragione di Bo : BO, gli è eguale tanto la ragione di oI : OE, quanto la ragione di ai : pe, essendo sezioni nel cono circolare ; Dunque

oG : OC = oI : OE ,

ed ag : pc = ai : pe

e permutando le dette due proporzioni, si avrà che oG : oI = OC : OE

ed ag : ai = pc : pe

Ma OC : OE = pc : pe (*a*) ;

Dunque oG : oI = ag : ai ;

ed essendo questa proprietà della Ellissi, perciò la figura FLGN, sarà Ellissi. Ciocchè in primo luogo doveasi dimostrare.

II. S'intenda ora il detto cono intersecato dal piano KBM, il quale passi per l'asse BO, e sia perpendicolare al triangolo ABC ; il detto piano secante KBM sarà un triangolo, e si avrà ancora, che

Bo : BO = oL : OK ,

e Bo : BO = oG : OC ;

Onde OL : OK = oG : OC

ed i loro duplì anche saranno proporzionali, cioè LN : KM = FG : AC,

e per

(*a*) *Corol. 1. Teor. 4. Cap. 1.*

e per conseguenza le due Ellissi FLGN, AK CM, saranno simili tra loro (*a*). Giocchè in secondo luogo doveasi dimostrare.

TEOREMA IX.

Se un cono Ellittico retto sta intersecato da un piano parallelo alla sua base, la superficie dello intero cono, sta alla superficie della porzione secata, come la somma de' triangoli innalzati sopra gli assi conjugati dell' Ellissi, che gli servono di base.

Tav. III. Fig. 29.

Sia intersecato il cono ABC, dal piano ac, parallelo alla base AC, la sezione arcs, sarà una Ellissi simile ad ARCS (*b*), Dico, che la superficie del cono Ellittico ABC, stia alla superficie conica della porzione aBc, come la somma delli due triangoli ABC, RBS, alla somma delli due triangoli aBc, Bs.

Si concepisca il cono A[illegible], diviso in un numero infinito di piani tutti paralleli alla base ARCS, questi piani segneranno nel cono in numero infinito di Ellissi, le quali saranno

(a) *Avvert. 1. Teor. 4. Cap. 1.*
(b) *Teor. precedente.*

no simili tra loro, e le comuni sezioni di quest' infiniti piani con i triangoli ABC, RBS saranno infinite rette parallele, ad AC. RS, le quali saranno assi maggiori, ed assi minori delle infinite Ellissi, nelle quali è diviso il detto cono, e comecchè il perimetro di una Ellissi, sta al perimetro dell' altra, essendo simili, come la somma dell' asse maggiore, e dell' asse minore della prima, alla somma dell' asse maggiore, e minore della seconda (a), perciò la somma di tutti i perimetri delle Ellissi, nelle quali è diviso il cono ABC, sta alla somma di tutti i perimetri delle Ellissi, nelle quali è diviso il cono aBc, come la somma degli assi maggiori, e minori, che sono le infinite sezioni ne' triangoli ABC, RBS, alla somma degli assi maggiori, e minori, che sono le corrispondenti sezioni ne' triangoli aBc, rBs; ma prendendosi questi infiniti perimetri di Ellissi per elementi delle superficie de' coni ABC, abc, e gl' infiniti assi maggiori, e minori corrispndenti essendo elementi de' triangoli ABC, RBS; aBc, rBs. Si avrà, che le di loro somme saranno le superficie di essi; Sicchè dunque la superficie del cono ABC, sta alla superficie del cono aBc, come la somma de' due triangoli ABC, RBS, alla somma de' due triangoli aBc, rBs. Ciocchè doveasi dimostrare.

CO-

(a) *Coroi. 6. Teor. 4. Cap. 2.*

COROLLARIO.

Essendo la superficie del cono ABC, alla superficie del cono aBc, come la somma de' due triangoli ABC, RBS, alla somma dei due triangoli aBc, rBs, convertendo si averà, che la superficie del cono ABC, sta alla superficie del cono tronco AacC, come gli triangoli ABC, RBS, alli due trapezii AacC, RrsS.

LEMMA I.

Se la quantità A, sta alla quantità B, come C, sta a D, e la quinta E, stia alla seconda B, come la sesta F, alla quarta D. Dico, che la somma della prima A, e la quinta E, cioè A+E, stia alla dupla della seconda B, cioè 2B, come la somma della terza, e sesta, cioè C+F, alla dupla della quarta, cioè 2D. T. III. fg. 30,

essendo per ipotesi $A : B = C : D$,
ed $E : B = F : D$;
permutando le dette due proporzioni si averà $A : C = B : D$:
ed $E : F = B : D$;
Sicchè $A : C = E : F$ (a);
e permutando $A : E = C : F$,

N e com-

(a) *Prop.* 11. *lib.* 5.

e componendo $A+E : E = C+F : F$,
e permutando $A+E : C+F = E : F$;
ma $E : F = B : D$.
ovvero come $2B : 2D$;
Dunque $A+E : C+F = 2B : 2D$.
e permutando $A+E : 2B = C+F : 2D$.
Ciocchè doveasi dimostrare.

LEMMA II.

T. III. fig. 30. Se la prima quantità A, stia alla seconda B, nella stessa ragione, che la terza C, sta alla quarta D, e la quinta E, stia alla sesta F, come la settima G, alla ottava H, e la prima A, stia alla seconda B, come la quinta E, alla sesta F; e la terza C, stia alla quarta D, come la settima G, alla ottava H. Dico che la prima A, starà alla quinta E, come la terza C, alla settima G.

Concepiscansi a, c, aliquote simili di B, D, le quali saranno aliquote simili degli antecedenti A, C; come ancora b, d, siano aliquote simili di F, H, le quali saranno aliquote simili degli antecedenti, E, G, e la c, d, siano di tali condizioni, che misurino la A, ed E. Ed essendo per ipotesi $A : B = C : D$, la a, misurerà tante volte l'A, quante volte la c, misura C; ed essendo $E : F = G : H$, la b, misurerà tante volte la E, quante volte la d, misura la G; Ma $A : B = E : F$, e $C : D = G : H$; Onde la a, mi

a, misurerà tante volte la A, quante volte la b, misura E, e così ancora la c, misurerà tante volte la C, quante volte la d, misura la G. Sicchè la c, misurerà tante volte la A, quante volte la d, misura la G; ma essendo c, d, aliquote simili di C, e G ed aliquote simili di A, ed E; Dunque A : E = C; G (*a*). Ciocchè doveasi dimostrare.

TEOREMA X.

Sia ABC, un cono Ellittico, e DBE, un cono circolare, la base del quale sia il cerchio DQEP, qualunque, ed abbiano l'asse OB, di commune, e siano intersecati dal piano arcs. Dico, che la superficie del cono Ellittico tronco AacC, sta alla superficie del cono circolare tronco DdeE, come la somma de' due trapezii AacC, RrsS, al duplo trapezio DdeE. T. III. fig. 29.

La superficie del cono DBE, sta alla superficie del cono dBe, come il triangolo DBE, al triangolo dBe (*b*); ovvero come la somma de' due triangoli DBE, PBQ, alla somma de' due triangoli dBe, pBq, per essere questi dupli di quelli, e convertendo, la superficie del cono DBE, sta alla superficie del

(a) *Def.* 6. *lib.* 5.
(b) *Teor.* 1. *Cap.* 7.

cono tronco DdeE, come li due triangoli DBE, PBQ, alli due trapezii DdeE PpqQ, Ciò posto, nel triangolo ABO, si averà che

AO : ao = DO : do (*a*)

Onde ancora li loro dupli saranno proporzionali, e perciò AC : ac = DE : de,
e permutando AC : DE = ac : de;
Ma AC : DE, come il triangolo ABC, al triangolo DBE; ed ac : de, come il triangolo aBc, al triangolo dBe (*b*); dunque il triangolo ABC, sta al triangolo DBE, come il triangolo ABc, al triangolo dBe; della stessa maniera si dimostra, che il triangolo RBS, sta al triangolo PBQ, come il triangolo rBs, al triangolo pBq; Ma siccome si è detto AC : DE = ac : de, e della stessa maniera ancora si può dimostrare, che RS: PQ = rs : pq;
ed essendo le due Ellissi ARCS, arcs, simili tra loro si averà AC : RS = ac : rs (*c*);
Dunque AC+RS : 2DE = ac + rs : 2de (*d*) per essere PQ = DE, e pq = do: onde anche la somma de' due triangoli ABC, RBS, sta alla somma de' due triangoli DBE, PBQ, o sia al dublo triangolo DBE: come la somma de' due triangoli aBc, rBs, al duplo trian-

go-

(a) *Coroll. 2. prop. 4. lib. 6.*
(b) *Prop. 1. lib. 6.*
(c) *Avvert. I. Teor. 4. Cap. 1.*
(d) *Lemma I. di questo Teor.*

golo dBe ; e permutando , e convertendo , la somma de' due triangoli ABC , RBS , sta alla somma de' due trapezii AacC , RrsS , come il duplo triangolo DBE , al duplo trapezio DdeE ; ma la somma de' due triangoli ABC , RBS , sta alla somma de' due tapezii AacC , RrsS, come la superficie del cono Ellittico ABC , alla superficie del cono tronco AacC (*a*); e la somma de' due triangoli DBE; PBQ , cioè il duplo triangolo DBE , sta al duplo trapezio DdeE , come la superficie del cono circolare DBE , alla superficie del cono tronco DdeE (*b*) : Dunque la superficie del cono Ellittico ABC , sta alla superficie del cono tronco AacC , come la superficie del cono circolare DBE , alla superficie del cono tronco DdeE ; e convertendo la superficie del cono Ellittico ABC , sta alla superficie del cono aBc , come la superficie del cono circolare DBE , alla superficie del cono dBe.

Inoltre la superficie del cono Ellittico ABC, sta alla superficie del cono aBc , come la somma de' due triangoli ABC , RBS , alla somma de' due triangoli aBc , rBs (*c*) , e la superficie del cono circolare DBE , stando alla superficie del cono dBe , come il duplo triangolo DBE , al duplo triangolo dBe (*d*) ; e la su-

(a) *Corol. Teor.* 9 *Cap.* 7.
(b) *Corol. Teor.* 1. *Cap.* 7.
(c) *Teor.* 9. *Cap.* 7.
(d) *Teor.* 1. *Cap.* 7.

perficie del cono Ellittico ABC, stando alla superficie del cono aBc, come la superficie del cono circolare DBE, alla superficie del cono dBe, e finalmente la somma de' due triangoli ABC, RBS, stando alla somma de' due triangoli aBc, rBs, come il duplo triangolo DBE, al duplo triangolo dBe, siccome si è detto; Onde per lo Lemma II. di questo Teorema si averà, che la superficie del cono Ellittico ABC, stia alla superficie del cono circolare DBE, come la somma de' due triangoli ABC, RBS, al duplo triangolo DBE. Ma siccome si è dimostrato, la somma de' due triangoli ABC, RBS, sta alla somma de' due trapezii AacC, RrsS, come la superficie del cono Ellittico ABC, alla superficie del cono tronco AacC; ed il duplo triangolo DBE, sta al duplo trapezio DdeE, come la superficie del cono circolare DBE, alla superficie del cono tronco DdeE; Sicchè dunque essendo gli antecedenti di queste due analogie proporzionali, li conseguenti anche saranno proporzionali, e perciò la superficie del cono Ellittico tronco AacC, stara alla superficie del cono circolare tronco DdeE, come la somma de' due trapezii AacC, RrsS, al duplo trapezio DdeE. Ciocchè doveasi di mostrare.

AV-

AVVERTIMENTO I.

Essendosi dimostrato che la superficie di un cono Ellittico, stia alla superficie di un cono circolare, avendo la stessa altezza, come la somma de' due triangoli innalzati sopra l'asse maggiore, e minore, al duplo triangolo eretto sopra il diametro del cerchio, ch'è base del cono circolare, ovvero come la somma dell'asse maggiore, e minore della Ellissi ch'è base del detto cono, al duplo diametro del cerchio base del detto cono circolare; si potrà avere il valore di una superficie di un dato cono Ellittico, essendo data l'altezza, l'asse maggiore, e l'asse minore della base; con ritrovare un quarto proporzionale dopo un diametro qualunque, la semisumma dell'asse maggiore, e minore, e la superficie del cono circolare, ch'abbia per base un cerchio del supposto diametro, e per asse quello istesso del cono Ellittico, e l'enunciato quarto proporzionale sarà la superficie del cono Ellittico.

AVVERTIMENTO II.

Si puole avere il valore della superficie di un cono Ellittico di un'altra maniera, la quale dipenderà dalla seguente Teoria. Suppongasi inscritto nella Ellissi ARCS, che è base del cono Ellittico ABC, il rombo T. III. fig. 29.

ARCS, e sopra di un tal rombo concepiscasi eretta una piramide, la quale abbia un comune vertice col riferito cono. Intendasi ora diviso il detto cono da un numero infinito di piani tutti paralleli alla base, nella superficie conica si segnaranno infinite Ellissi, e nella piramide infiniti rombi, li quali saranno inscritti in ciascuna Ellissi corrispondente; e comecchè ciascun perimetro di rombo sta, a ciascun perimetro di Ellissi corrispondente, come 2828 : 3141 (*a*); Così la somma de' perimetri di tutti gli rombi sta alla somma de' perimetri di tutte le Ellissi, anche come 2828 : 3141; ma la somma di tutti gli infiniti perimetri de' rombi, che compongono la piramide è eguale alla superficie della piramide, e gli infiniti perimetri delle Ellissi, che compongono il cono, formano la superficie conica, per essere quelli elementi della superficie della piramide, e questi elementi della superficie del cono Ellittico; dunque la superficie della piramide, la base della quale sia rombo, e sia inscritto nel cono Ellittico, sta alla superficie dello stesso cono, come 2828: 3141. Onde essendo cognita la superficie di una tal piramide, si avrà la superficie del riferito cono, ritrovando un quarto proporzionale dopo li due numeri costanti 2828, 3141, e la detta superficie di piramide.

TEO-

(a) *Corol. 4. Teor. 3. cap. 2.*

TEOREMA XI.

La superficie dell' Ellittoide, sta alla superficie della sfera il di cui diametro è l' asse minore, come la somma dell'asse maggiore, e dell'asse medio delle Ellittoide, al duplo asse minore.

Sia ADBCH, un semiellittoide, l' asse maggiore del quale sia AB, l' asse medio CD, ed il semiasse minore sia OH, e sia inoltre EGFeH, uno emisfero che abbia per raggio il semiasse minore OH, dello stesso Ellittoide. Dico, che la superficie del semiellittoide ADBCH, sta alla superficie dello Emisfero EGFeH, come la somma di AB, CD, alla dupla EF. Tav. III. fig. 31.

Suppongasi diviso il detto semiellittoide ADBCH, da due piani verticali, li quali passino per l'asse maggiore, e medio, e s' intersechino nel semiasse minore, le sezioni saranno le due semiellissi AHB, CHD, e nello Emisfero EGFeH, si segneranno colli descritti piani li due semicerchi EHF, eHG; s' intenda ora diviso il detto semiellittoide per il piano IKLM, parallelo al piano ADBC, le communi sezioni colli enunciati piani verticali, nelle due semiellissi saranno le due rette IL, MK, e nelli due semicerchi le due in, om. Indi per

lo punto i , tirisi la retta iN, tangente al semicerchio EHF , la quale si vada ad unire col raggio OH , prolungato nel punto N , e si uniscono li punti N , ed I , per mezzo della retta NI, questa sarà tangente nella semiellissi AHB (*a*) ; lo stesso facciasi dall' altra parte, cioè tirando le due rette Nn , NL, e siccome la retta Nn , è tangente del semicerchio, così la NL , sarà tangente della semiellissi. Ma se da qualunque punto della periferia del cerchio imno , al punto N , si tirino delle rette , queste saranno sempre tangenti agli semicerchi, che intersecano lo Emisfero per piani verticali , poichè la prima di queste, siccome si è dimostrato è tangente al semicerchio, ed essendo il punto N, nella istessa posizione a tutti gli infiniti semicerchi, che possano intersecare lo Emisfero , e li detti semicerchi essendo tutti eguali, per tal ragione tutte le rette saranno tangenti de' detti semicerchi. Dunque tutte le rette , che si tirano dal punto N , al perimetro della Ellissi IKLM saranno tangenti alle semiellissi secanti verticalmente il detto semiellittoide .

Se s' intende ora secata la porzione IKLMH, dello semiellittoide , da un piano parallelo ; ed infinitamente vicino al piano IKLM , gli archetti Ib , Kc , Ld , Mf , si confonderanno con

(a) *Teor.* 2. *Cap.* 2.

on le porzioni delle descritte tangenti : e er conseguenza si potranno prendere per linee tte. Onde la corona IKLMbcdf, sarà un co- o tronco Ellittico, e la corona corrispon- ente sarà un cono tronco circolare, che per- ò la corona conica Ellittica IKLMbcdf, sta lla corona conica corrispondente nella sfera, ome la somma delli due trapezii ILdb , IKcf, al duplo trapezio corrispondente nella orona sferica (*a*); Sicchè se si concepisce il emiellittoide ADBCH, diviso in un numero li piani infinitamente vicini l'uno, all'altro, empre si averà, che la superficie della coro- na Elittoidica, stia alla superficie della co- rona sferica corrispondente, come la somma le' due trapezii corrispondenti, al duplo tra- pezio nella sfera: Onde le somme di esse anche aranno proporzionali; ma la somma delle corone Elittoidiche formano la superficie del semiellittoide ADBCH, e la somma delle corone sferiche formano la superficie dell' Emisfero ECFeH, così ancora le somme de' primi trapezii sono le due semiellissi AHB, CHD, e la somma de' dupli trapezii secondi, si è il duplo semicerchio EHF; dunque la su- perficie dello semiellittoide ADBCH, sta al- la superficie dello Emisfero EGFeH, come la somma delle due semiellissi AHB, CHD, al du- plo semicerchio EHF; Ma la semiellissi AHB,

(*a*) *Teor.* 10. *Cap.* 7.

sta al semicerchio EHF, come AB : HF (*a*), e la semiellissi CHD, sta al semicerchio eHG, che è eguale ad EHF, come CD, ad eG, ovvero EF; Sicchè dunque la superficie del semiellittoide, sta alla superficie dell' Emisfero, che ha per diametro l'asse minore dell'Ellittoide, come la somma dell' asse maggiore, e medio, al duplo asse minore. Ciocchè doveasi dimostrare.

COROLLARII.

Col medesimo raziocinio usato nelli Corollarii del Teorema III. di questo Capitolo, si possono dimostrare li seguenti.

I. Che la superficie di un segmento Ellittoidico intersecato da un piano parallelo all'asse maggiore, ed all' asse medio, stia alla superficie del segmento sferito corrispondente di una sfera, che ha per diametro l'asse minore come la somma dell' asse maggiore, e medio al duplo asse minore.

II. Che la superficie della sfera, che ha per diametro l'asse maggiore di uno Ellittoide, sta alla superficie dello stesso Ellittoide come il duplo asse maggiore, alla somma dell' asse medio, e minore.

III. E finalmente, che la superficie di un segmento di uno Elittoide intersecato da un piano

(a) *Corol.* 2 *Teor.* 3. *Cap.* 1.

iano parallelo all'asse maggiore, e minore, a alla superficie del segmento corrispodento ella sfera, che ha per diametro l'asse minore me la somma dell'asse maggiore, e medie, duplo asse minore, e così ancora de' seg- enti intersecati de' piani paralleli all'asse me- o, e minore; E per conseguenza la super- ie di qualunque segmento Ellittoidico, sta la superficie del segmento della sfera corri- ondente che ha per diametro l'asse minore, me la superficie dello Ellittoide, a quella ella sfera.

TEOREMA XII.

a superficie laterale di un parallelepipedo circonscritto ad una Volta a vela senza reguglio di sesta specie, sta alla somma delle superficie de' quattro triangoli Ellittoidici, o sia alla somma delle superficie delle quattro incosciature di detta Volta, nella ragione di 7000 : 1331.

Ia EFHGb, un parallelepipedo circoscrit- to alla volta a vela senza reguglio di se- specie. Dico, che la superficie laterale di tto parallelepido, stia alla somma delle perficie de' quattro triangoli Ellittoidici EN, NFO, OHP, PGM, come 7000 : 3.

Facendo lo stesso raziocinio usato ne' Teo-

remi precedenti, si averà, che la somma del
le superficie de' quattro triangoli Ellittoidic
MEN , NFO , OHP , PGM , sta alla som
ma delle superficie de' quattro triangoli sferi
ci corrispondenti oTq, qSr , rRp , pQo , co
me la somma di GE , EF , alla somma d
QT , TS , ovvero come li loro dupli , cio
come il perimetro del rettangolo GEFH , a
perimetro del quadrato QTSR , oppure com
la superficie laterale del parallelepipedo EC
alla superficie laterale del parallelepipedo Tm
e permutando , ed invertendo , la superfici
laterale del parallelepipedo EC, sta alla som
ma delle superficie de' detti quattro triango
ellittoidici , come la superficie laterale d
parallelepipedo Tm , alla somma delle supe
ficie de' quattro triangoli sferici corrisponden
ti ; Ma la superficie laterale del parallelep
pedo Tm , sta alla somma delle superfic
de' quattro triangoli sferici , come 7000
133 (a) ; dunque la superficie laterale d
parallelepipedo EC, sta alla somma delle s
perficie de' quattro triangoli Ellittoidici ,
sia alla superficie delle incosciature della Vo
ta a vela di sesta specie , come 7000 : 13
Ciocchè doveasi dimostrare. A

(a) *Prob.* 2. *Cap.* 7.

AVVERTIMENTO I.

Per avere il valore della superficie di una Volta a vela senza reguglio di sesta specie, la quale sarà formata sopra una pianta rettangolare, e gli archi che sostengono detta Volta saranno semiellissi, devesi.

I. moltiplicare il perimetro del rettangolo, che gli serve di base a detta Volta, per il sesto, ed il prodotto si noti.

II. Si trovi un quarto proporzionale dopo li due numeri costanti 7000, 1331, ed il detto prodotto, e si noti; e questo sarà la somma delle superficie delle quattro incosciature.

III. Si trovi inoltre dopo li due numeri costanti 14, 11, ed il prodotto della lunghezza, e larghezza di detta Volta, ch' è il rettangolo abCd, un quarto proporzionale, e questo sarà la Ellissi MNOP.

IV. Finalmente si uniscano li detti due quarti proporzionali, e la di loro somma sarà il valore della superficie della Volta a vela senza reguglio di sesta specie.

AVVERTIMENTO II.

Sicchè dunque per avere il valore della superficie di qualunque Volta a vela senza reguglio, devesi prima conoscere di quale specie-

cie sia: a tre classi si sono ridotte le dette Volte in questo Capitolo, ed a ciascuna di esse se gli è fatta una operazione diversa; cioè se è della prima specie la detta Volta, la quale sarà formata sopra un quadrato, e sopra li quattro lati di detto quadrato vi saranno eretti quattro semicerchi, si averà il valore della detta superficie, facendo la seguente operazione.

I. Devesi moltiplicare il perimetro del quadrato, che gli serve di base per il sesto ed il prodotto si noti.

II. Devesi trovare un quarto proporzionale dopo li due numeri costanti 1000, 583, ed il detto prodotto, ed il quarto proporzionale sarà il valore della superficie di detta Volta; siccome si è detto nell'Avvert. Probl. I. di questo Capitolo.

La seconda Classe abbraccia la seconda, la quinta, e la sesta specie, cioè se la Volta è formata sopra un quadrato, e sopra li suoi lati vi siano erette quattro semiellissi per lungo a detti lati; ovvero sia formata sopra un quadrato, e sopra li lati di esso vi siano erette quattro semiellissi per corto, ovvero sia formata sopra un rettangolo, e sopra li lati di esso vi siano erette quattro semiellissi di qualunque natura. Vale a dire, che la seconda classe di dette Volte, abbraccia quelle, le quali sono sostenute da quattro archi ellittici, e

pe

per avere il valore di ciascuna di esse, devesi.

I. Moltiplicare il perimetro della base di detta Volta, per il sesto di essa, ed il prodotto si noti.

II. Trovare un quarto proporzionale, dopo li due numeri costanti 7000, 1331, ed il detto prodotto, e si noti.

III. Inoltre dopo li due numeri costanti 14, 11, ed il prodotto della lunghezza, e larghezza di detta Volta si trovi un altro quarto proporzionale e si noti.

IV. Finalmente si uniscano gli detti due quarti proporzionali, la di loro somma sarà il valore della superficie della detta Volta, siccome si è detto nel Probl. II. nell'Avvert. Teor. VII., e nell'Avvert. Teor. XI di questo Capitolo.

La terza Classe finalmente di dette Volte, abbraccia la terza, e la quarta specie, cioè se è formata sopra un rettangolo, e sopra due lati di detto rettangolo vi siano eretti due semicerchi, e sopra gli altri due lati vi siano erette due semiellissi; ed in tal caso devesi.

I. Moltiplicare la quadrupla larghezza per la metà di essa, ed il prodotto si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 1000, 583, ed il detto prodotto si trovi un quarto proporzionale, e si noti

III. Finalmente devesi trovare un altro quarto proporzionale, dopo la larghezza, la lunghezza, ed il detto quarto proporzionale notato, questo sarà il valore della superficie della detta Volta a vela senza reguglio; Siccome si è detto nell' Avvert. Teor. IV., e nell' Avvertimento Teor. VI. di questo Capitolo.

CAP.

CAP. VIII.

Della solidità delle varie specie della Volta a vela col reguglio.

AVVERTIMENTO,

Nel Capitolo VI. si è data la definizione di una tale Volta; ed in esso si è fatto vedere da quali solidi vengono generate le varie specie delle Volte a vela; e comecchè in detto Capitolo si è trattato delle varie specie di dette Volte a vela senza reguglio, così ora in questo si tratterà delle istesse specie di Volte a vela col reguglio.

PROBLEMA.

Trovare la ragion, che passa tra il parallelepipedo circonscritto ad una Volta a vela sferica col regulio, e la solidità di detta Volta.

Si Intenda la stessa preparazione fatta nel Problema del Cap. VI. colla variazione solamente, che sia l'Emisfero intersecato dalli quattro piani laterati del parallelepipedo innalzato sopra il quadrato NPQR, ed il detto pallelepipedo abbia per altezza il raggio T. II. fig. 17.

OB, sarà l'anima della Volta a vela sferica col reguglio, l' Emisfero meno li quattro semisegmenti NMPS, PnQK, QXRT, RLNI. Voglio intanto trovare la ragion, che passa tra il parelilelepipedo, che ha per base il quadrato NQ, e per altezza la OB; ed il detto parallelepipedo meno l'anima della Volta a vela sferica col reguglio, INSPKQTRIB.

Sia $NP = PQ = a$; sarà $NQ = Ln = \sqrt{2a^2}$; ed $nK = \sqrt{4a^2 - 2a^2\sqrt{2}}$, $aS = uK = Oa = OV = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ sarà ancora $OP = ON = OL = OB = \sqrt{2a^2}$; ed $LV = LO - OV = \frac{\sqrt{2a^2}}{2} - \frac{a}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2a^2} - a\sqrt{2}}{2}$ sarà il cerchio il di cui diametro è $\overline{NQ}^2 = \frac{22}{7}\sqrt{2a^2} \times \sqrt{2a^2} = \frac{44}{7}a^2$.

È l' Emisfero $LBn = \frac{11}{7}a^2 \times \frac{2}{3}\sqrt{2a^2} = \frac{11}{21}\sqrt{2a^6} = \frac{11}{21}a^3\sqrt{2}$

Inoltre il cerchio, che ha per raggio $Kn = \frac{11}{28} \times 4\,\overline{Kn}^2 = \frac{22}{7}\left(\frac{4a^2 - 2a^2\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{11}{14}\left(4a^2 - 2a^2\sqrt{2}\right) = \frac{11}{7}\left(2a^2 - a^2\sqrt{2}\right)$

Le quattro superficie de' semisegmenti latera-

li

li NMPS, PnQK, QXRT, RLNI $= \frac{11}{7}$ $\left(4a^2 - 2a^2\sqrt{2}\right) = \frac{22}{7}\left(2a^2 - a^2\sqrt{2}\right)$

E li quattro semisettori corrispondenti NMPSO, PnQKO, QXRTO, RLNIO $= \frac{11}{21}\left(2a^3\sqrt{2} - 2a^3\right) = \frac{22}{21}\left(a^3\sqrt{2} - a^3\right)$;

Il semicerchio PKQ $= \frac{11}{28}a^2$;

Ed il semicono PKQO $= \frac{11}{168}a^3$.

Onde li quattro semiconi corrispondenti agli semisettori saranno $\frac{11}{42}a^2$;

E perciò la solidità dei quattro semisegmenti sarà $= \frac{22}{21}\left(a^3\sqrt{2} - a^3\right) - \frac{11}{42}a^3 = \frac{44a^3\sqrt{2} - 55a^3}{42}$; Ma lo Emisfero LBn $= \frac{11}{21}a^3\sqrt{2}$; Dunque l'Emisfero LBn meno gli detti quattro semisegmenti, o sia l'anima della Volta, sarà $= \frac{11}{21}a^3\sqrt{2} - \frac{44a^3\sqrt{2} + 55a^3}{42} = \frac{55a^3 - 22a^3\sqrt{2}}{42}$.

Inoltre il parallelepipedo, che ha per base il quadrato NQ, e per altezza OB $= \overline{NP}^2 \times OB = a^2\frac{\sqrt{2a^2}}{2} = a^3\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ed il detto parallelepido, meno la detta anima di Volta, sarà $a^3\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{55a^3 + 22a^3\sqrt{2}}{42} = \frac{21a^3\sqrt{2} - 55a^3 + 22a^3\sqrt{2}}{42} = 43a^3$

$\frac{\sqrt{2} - 55a^3}{42}$. Onde il detto parallelepipedo, sta al solido parallelepipedo meno l'anima della Volta, o sia alla solidità della Volta a vela col reguglio di prima specie, come $a^3\sqrt{2} : \frac{43a^3\sqrt{2} - 55a^3}{42}$, ovvero come $\frac{21a^3\sqrt{2}}{42} : \frac{43a^3\sqrt{2} - 55a^3}{42}$, oppure come $21a^3\sqrt{2} : 43a^3\sqrt{2} - 55a^3$, e dividendo tutti gli termini di detta ragione per a^3, si averà, che il parallelepipedo circonscritto alla Volta a vela col reguglio di prima specie, sta alla solidità di detta Volta, come $21\sqrt{2} : 43\sqrt{2} - 55$, ovvero come 29. 694. : 5. 802; oppure come 29694 : 5802, e riducendo la detta ragione a menini termini; si averà, che il parallelepipedo circonscritto alla Volta a vela, sferica, sta alla solidità di detta Volta, come 4949 : 967. Ciocchè si dovea cercare.

AVVERTIMENTO.

Per avere il valore della solidità di una Volta a vela col reguglio di prima specie devesi.

I. Moltiplicare la larghezza, per la lunghezza; e per la somma del sesto, e reguglio, ed il prodotto si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 4949, 967, ed il detto prodotto devesi trovare un quarto proporzionale, e si noti.

III. Finalmente il detto quarto proporzionale si unisca col prodotto della lunghezza, e larghezza, e grossezza alla cima, la somma sarà la solidità di detta Volta, in quelle parti cubiche, ch' è l' aliquota commune.

Sia data per esempio una Volta a vela sferica col reguglio, la larghezza della quale NP, sia 20, ed essendo sferica sarà PQ= 20. il sesto aS = 10; ed il reguglio By = $4\frac{1}{4}$; e la grossezza alla cima sia 1. Il prodotto della lunghezza, per la larghezza, e per la somma del sesto, e reguglio sarà 5700, che sarà il parallelepipedo circonscritto alla detta Volta. Indi dopo li due numeri costanti 4949, 967, ed il detto prodotto 5700, si trovi il quarto proporzionale, che sarà $1113\frac{3663}{4949}$, a questo vi si aggiunga il prodotto della lunghezza, e larghezza, per la grossezza della cima, che sarà 400, la somma $1513\frac{3663}{4949}$ sarà il valore della solidità di detta Volta. T. II. fig. 17.

TEOREMA I.

Il parallelepido circonscritto all'anima della Volta a vela col reguglio di seconda specie, sta alla solidità di detta Volta nella ragione di 4949 : 967.

T. III. fig. 22. SI consideri la figura col segmento verticale, si averà, che lo semisferoide depresso sta alli quattro semisegmenti DSKM, NBQC, QTGO, GADg, come lo Emisfero alli quattro semisegmenti corrispondenti sferici (*a*), e convertendo, lo semisferoide, sta all'anima della Volta di seconda specie, come lo Emisfero, all'anima della Volta di prima specie, e permutando, lo semisferoide, sta all'Emisfero, come l'anima della Volta di seconda specie, all'anima della Volta sferica; Ma lo semisferoide, sta all'Emisfero, come il quadrato di AB, al quadrato fatto da ab (*b*), ovvero come il quadrato DQ, al quadrato ci; ed il quadrato DQ, sta al quadrato ci, come il parallelepipedo circoscritto all'anima della Volta di seconda specie, al parallelepipedo circoscritto all'anima della Volta sferica, perchè hanno eguali altezze; Dunque il parallelepipedo circoscritto all'anima della Volta

(a) *Corol. 2. Teor. 3 Cap. 6.*
(b) *Teor. 4. Cap. 6.*

ta di seconda specie, sta al parallelepipedo circonscritto all'anima della Volta sferica, come l'anima della Volta di seconda specie, all' anima della Volta sferica, e permutando, e convertendo il parallelepipedo circoscritto all' anima della Volta a vela col regnglio di seconda specie, sta alla solidità di detta Volta, come il parallelepipedo circonscritto all'anima della Volta sferica, alla solidità di detta Volta; ma il parallelepipedo circonscritto all' anima della Volta sferica sta alla solidità di essa, come 4949 : 967 (a): Dunque il parallelepipedo circonscritto all anima della Volta di seconda specie; sta alla solidità di essa, nella ragione di 4949: 967. Ciocchè doveasi dimostrare.

AVVERTIMENTO I.

Per avere il valore della solidità della Volta a vela di seconda specie col regnglio, devesi fare la stessa operazione di quella detta nell' avvertimento del Problema di questo Capitolo.

AVVERTIMENTO II.

Si è dimostrato nell' Avvertimento II. Teor. IV. Cap. VI. che intersecando lo sferoide depresso per un piano, che passa per l' asse minore, dallo semisferpide colla intersezio-

(a) *Prob. precedente.*

sezione dello enunciato parallelepipedo si avrà la Volta a vela senza reguglio di terza specie; così ora intersecandosi lo stesso sferoide per un piano che passa per l'asse minore al qual piano gli sia perpendicolare l'asse maggiore; la mettà del parallelepipedo, il quale avrà per altezza il semiasse maggiore taglierà dallo semisferoide la Volta a vela col reguglio di terza specie; e per dimostrare che il parallelepipedo circoscritto alla detta Volta, stia alla solidità di essa, nella stessa ragione del parallelepipedo circoscritto alla Volta sferica, alla sua solidità, è necessario premettere il seguente

LEMMA.

T. I. fig. 5. Sia MTNV, un quadrato circoscritto al cerchio AKBL, ed il quadrato dXDy, gli sia inscritto, ed al cerchio albP, gli sia circonscritto il quadrato qr, ed inscritto il quadrato hF; si prolunghino li due lati opposti de'due quadrati inscritti ne'cerchi, finatonecchè incontrano gli altri lati de' quadrati circonscritti a detti cerchi. Dico che il rettangolo Wm, sta al rettangolo WD, come il rettangolo px, al rettangolo pF.

Nel triangolo DHC, la FE, è parallela a DC. Onde HD: HC = HF : HE (*a*);

Ma

(a) *Corol.* 1. *prop.* 2, *lib.* 6.

Ma HD = HB ; ed HF = Hb ;
Dunque HB : HC = Hb : HE ,
e dividendo BC : HC = bE : HE ;
e permutando BC : bE = HC : HE ;
ma HC : HE = DC : FE ;
dunque BC : bE = DC : FE
ovvero come DX : Fu ;

Sicchè gli due rettangoli Xm , ux , saranno simili tra loro (*a*) ; e perciò il rettangolo Xm , starà al rettangolo ux , come $\overline{DX}^2$: $\overline{Fu}^2$ (*b*) , ovvero come il rettangolo WD , al rettangolo pF , essendo questi mettà de' quadrati fatti da DX , e Fu , e permutando il rettangolo Xm , sta al rettangolo WD, come il rettangolo ux , al rettangolo pF , e componendo il rettangolo Wm, sta al rettangolo WD , come il rettangolo px , al rettangolo pF . Ciocchè doveasi dimostrare.

COROLLARIO.

Essendosi dimostrato, che il rettangolo Wm, sta al rettangolo WD, come il rettangolo px, al rettangolo pF, onde permutando, il rettangolo Wm , sta al rettangolo px , come il rettangolo WD , al rettangolo pF .

Teo-

(*a*) *Def.* 1. *lib.* 6.
(*b*) *Prop.* 20. *lib.* 6.

TEOREMA II.

Il parallelepipedo circonscritto all'anima della Volta di terza specie, sta alla solidità di detta Volta come

4949. : 967.

T. III. fig. 21. LO semisferoide, sta alli quattro semisegmenti, che il parallelepipedo mG, taglia dal detto semisferoide, come lo Emisfero, che ha per diametro l'asse maggiore, alli quattro semisegmenti, che il parallelepipedo IR, taglia dal detto Emisfero (*a*); Onde convertendo: lo semisferoide, sta allo semisferoide, meno li quattro detti semisegmenti sferoidi, o sia all'anima della Volta a vese col reguglio di terza specie, come lo Emisfero, all'anima della Volta a vela col reguglio di prime specie; e permutando, lo semisferoide, sta all'Emisfero, come l'anima della Volta di terza specie, all'anima della Volta sferica; Ma lo semisferoide sta all'Emisfero, che ha per diametro l'asse minore, come il quadrato dell'asse maggiore, al quadrato dell'asse minore (*b*), ovvero come $\overline{mM}^2 : \overline{iN}^2$ (*c*) oppure come il rettangolo mA, al

T. IV. fig. 32.

(a) *Avvert.* 2. *Teor.* 4 *Cap.* 6.
(b) *Teor.* 3. *Cap.* 6.
(c) *Corol.* 1 *Teor.* 3, *Cap.* 1.

al rettangolo *ia*, essendo questi mettà de' detti quadrati; ma il rettangolo mA, sta al rettangolo ia, come il rettangolo mB, sta al rettangolo ib(*a*), ed il rettangolo mB, sta al rettangolo ib, come il parallelepipedo gB, al parallelepipedo fb, avendo una stessa altezza; Dunque il parallelepipedo gB, sta al parallelepipedo fb, come l'anima della Volta a vela col reguglio di terza specie, all' anima della Volta a vela sferica col reguglio, e permutando, e convertendo, il parallelepipedo gB, sta alla solidità della Volta a vela col reguglio di terza specie, come il parallelepipedo fb, alla solidità della Volta sferica; ma il parallepipedo fb, sta alla solidità della Volta sferica, come 4949: 967 (*b*); Dunque il parallelepipedo gB, circoscritto all' anima della Volta a vela di terza specie col reguglio, sta alla solidità di detta Volta, come 4949 : 967.

AVVERTIMENTO.

Per avere il valore della solidità di una Volta a vela col reguglio di terza specie, devesi fare la stessa operazione di quella descritta nell Avvertimento del Problema di questo Capitolo.

TEO-

(b) *Lemma precedente.*
(a) *Probl. Cap.* 8.

TEOREMA III.

Il parallelepidedo circonscritto all'anima della Volta a vela col reguglio di quarta specie, sta alla solidità di detta Volta, come 4949 : 967.

T. II. §. 21. SUppogansi li parallelepipedi MO, iL, eretti sopra il rettangolo Me, e sopra il quadrato in, avere per altezza commune il semiasse QI, questi taglieranno dallo semisferoide, e dall'Emisfero quattro semisegmenti laterali; e comecchè questi sono proporzionali collo semisferoide, e coll'Emisfero, siccome si è detto nel Teorema VI. Capitolo VI., così convertendo le ragioni, si averà, che lo semisferoide, sta all'Emisfero, che ha per diametro l'asse minore, come l'anima della Volta di quarta specie, all'anima della Volta sferica. Ma lo semisferoide, sta all'Emisfero, come il rettangolo MCeD, al quadrato iNum (*a*), ovvero come il parallelepipedo, che a per base il rettangolo Me, e per altezza il semiasse minore QI, al parallelepipedo, che ha per base il quadrato in, e per altezza la stessa QI; Dunque permutando, il pa-

(a) *Coroll. 4. Teor. 5 Cap. 6.*

parallelepipedo, che ha per base il rettangolo Me, e per altezza QI, o sia il parallelepipedo circonscritto all' anima della Volta di quarta specie, sta alla detta anima di Volta, come il parallelepipedo, che ha per base il quadrato in . e per altezza QI, o sia il parallelepipedo circonscritto all'anima della Volta sferica, alla stessa anima di Volta, e convertendo, il parallelepipedo circonscritto all' anima della Volta di quarta specie, sta alla solidità di detta Volta, come il parallelepipedo circonscritto all' anima della Volta sferica, alla solidità di essa; ma il parallelepipedo circonscritto all' anima della Volta a vela sferica col reguglio, sta alla solidità di essa come 4949 : 967 (a); Dunque il parallelepipedo circonscritto all' anima della Volta a vela col reguglio di quarta specie, sta alla solidità di essa Volta nella ragione di 4949 : 967. Ciocchè doveasi dimostrare.

AVVERTIMENTO.

Per avere il valore della solidità della Volta a vela col reguglio di quarta specie, devesi fare la stessa operazione di quella descritta nell' Avvertimento del Problema di questo Capitolo.

Teo-

(a) *Probl. Cap.* 8.

TEOREMA IV.

Il parallelepidedo circonscritto all' anima della Volta a vela col reguglio di quinta specie, sta alla solidità di detta Volta; nella ragione di 4949 : 967.

T. III. fig. 24. SUppongasi il parallelepipedo bQ, avere per altezza il semiasse maggiore dello sferoide lungo, ed il parallelepipedo ba, avere per altezza il semiasse minore dello stesso sferoide e facendo lo stesso raziocinio dell'Avvertimento II. Teorema VI. Cap. VI. Si avrà, che il parallelepipedo circonscritto all' anima della Volta di quinta specie, sta alla sua solidità come il parallelepipedo circonscritto all'anima della Volta a vela sferica, alla di lei solidità, ma il parallelepipedo circonscritto all' anima della Volta sferica, sta alla solidità di essa come 4949; 967 (*a*); Dunque il parallelepipedo circonscritto all' anima della Volta a vela col reguglio di quinta specie, sta alla solidità di detta Volta, come 4949: 967. Cioccchè doveasi dimostrare.

AV-

(a) *Probl. Cap.* 8.

AVVERTIMENTO.

Per avere il valore della solidità di una Volta a vela col reguglio di quinta specie, devesi fare la stessa operazione detta nell' Avvertimento del Problema di questo Capitolo.

TEOREMA V.

Il parallelepipedo circonscritto all'anima della Volta a vela col reguglio di sesta specie, sta alla solidità di detta Volta nella ragione di 4949: 967.

SUppongasi il parallelepipedo EC, avere per altezza il semiasse minore LY, ed il parallelepipedo Tm, avere la stessa altezza, e siccome questo è circonscritto alla Volta a vela sferica col reguglio, così quello sarà circonscritto all' anima della Volta a vela col reguglio di sesta specie. e facendo il medesimo raziocinio detto nel Teor. VIII. Cap. VI. si avrà che il parallelepipedo circonscritto all' anima della Volta a vela col reguglio di sesta specie, sta alla sua solidità, come il parallelepipedo circonscritto all' anima della Volta sferica col reguglio, alla sua solidità; ma il parallelepipedo circonscritto all' anima della Volta sferica col reguglio, sta alla sua solidi-

Tav. III. Fig. 27.

tà come 4949 : 967 (a): dunque il parallelepipedo circonscritto all' anima della Volta col reguglio di sesta specie, sta alla solidità di detta Volta, come 4949 : 967. Ciocchè doveasi dimostrare.

AVVERTIMENTO I.

Per avere il valore della solidità di detta Volta a vela col reguglio di sesta specie, si deve fare la stessa operazione di quella descritta nell' Avvertimento del Problema di questo Capitolo.

AVVERTIMENTO II.

La detta Volta a vela col reguglio di sesta specie vien generata da sezioni fatte nello Ellittoide, siccome si è detto in quella senza reguglio, nell' avvertimento del Teor. VII. Cap. VI., e comecchè il detto Ellittoide puole avere infinite variazioni, a proporzione dell' Ellissi generatrici, e ciascuno di essi solidi è capace di due altre sezioni, cioè una che passi per l' asse medio, e gli sia perpendicolare l' asse maggiore, e l' altra per l' asse minore, alla quale gli sia perpendicolare l' asse medio, così la descritta Volta a vela col re-

(a) *Probl. Cap. 8.*

reguglio di sesta specie è capace d'infinite variazioni, a seconda della generazione del detto solido, e delle di lui sezioni, e tutte queste Volte saranno della stessa natura della di già descritta: sicchè dunque per avere il valore di qualunque Volta a vela col reguglio, e di qualunque specie essa sia, essendo data la lunghezza, la larghezza, il sesto, il reguglio, e la grossezza alla cima, devesi

I. Moltiplicare la larghezza per la lunghezza, e per la somma del sesto, e del reguglio, ed il prodotto si noti.

II. Dopo i due numeri costanti 4949, 967, ed il detto prodotto, si trovi un quarto proporzionale, e si noti.

III. Finalmente il detto quarto proporzionale si unisca col prodotto della lunghezza per la larghezza, e per la grossezza della cima; la somma sarà la solidità di detta Volta a vela col reguglio, in quelle parti cubiche, di cui è l'aliquota comune.

AVVERTIMENTO III.

Oltre delle descritte Volte a vela col reguglio, ve ne può essere un' altra, la quale sarà formata sopra una pianta rettangolare; e sopra i quattro lati del rettangolo saranno eretti quattro semicerchi. Vien generata una tal Volta dall' intersezione dei piani di un pa-

rallelepipedo eretto sopra un rettangolo inscritto nel cerchio massimo di una sfera, ed abbia per altezza il raggio della sfera. Sia NPQR, un rettangolo inscritto nel cerchio LMuX, e sopra i quattro lati OP, PQ, QR, RN, si concepiscano innalzati quattro piani, questi taglieranno dall' Emisfero LBu, i quattro semisegmenti NMPS, PuQK, QXRT, RLNI, le basi dei quali saranno i semicerchi, che saranno innalzati sopra i quattro lati del detto rettangolo. Il solido NSPKQTRIB, sarà l'anima della Volta a vela col reguglio, della quale s' intende trovare una formola generale per avere il valore della sua solidità: perciò sia

Tav. II. Fig. 33.

$$NP = a;\ PQ = b;\ aS = \frac{1}{2}a = \frac{a}{2}$$

e sarà $uK = \frac{b}{2}$

$$\text{ed } NQ = Ln = \sqrt{a^2+b^2} = c;\ \text{ed } OL = \frac{c}{2}$$

$$\text{sarà } LV = un = On - Ou = \frac{c}{2} - \frac{a}{2} = \frac{c-a}{2}$$

$$\text{ed } Ma = OM - Oa = \frac{c}{2} - \frac{b}{2} = \frac{c-b}{2}.$$

$$nK = \frac{\sqrt{c^2-ac}}{2};\ \text{ed } MS = \frac{\sqrt{c^2-bc}}{2}$$

sarà

sarà il cerchio, che ha per raggio $nK = \frac{11}{14} \times 4nK^2 = \frac{11}{14}(2c^2 - 2ac = \frac{11}{7}(c^2 - ac)$; onde le due superficie dei semisegmenti PnQK, NLRI, saranno eguali ad $\frac{11}{7}(c^2 - ac)$ (a)

E i due semisettori corrispondenti saranno $= \frac{11}{42}(c^3 - ac^2)$. Il cerchio, che ha per diametro PQ, sarà $= \frac{11}{14} b^2$, e saranno i due semiconi PKQO, NIRO $= \frac{11}{14} b^2 \times \frac{1}{3} \frac{a}{2}$

$= \frac{11}{14} b^2 a$;

onde saranno i due semisegmenti PnQK, NLRI $= \frac{11}{42}(c^3 - ac^2) - \frac{11}{84} b^2 a = A$.

Inoltre il cerchio, che ha per raggio MS, sarà $\frac{11}{14} \times 4MS^2 = \frac{11}{14}(2c^2 - 2bc) \frac{11}{7}(c^2 - bc)$ e saranno le superficie dei due semisegmenti NMPS, BXQT $= \frac{11}{7}(c^2 - bc)$

ed i due semisettori corrispondenti saranno $= \frac{11}{7}(c^2 - bc)\frac{1}{3} \frac{c}{2} = \frac{11}{42}(c^3 - bc^2)$.

Il cerchio, che ha per diametro NP, sarà $= \frac{11}{14} a^2$; e saranno i due semiconi NSPO, QTRO $= \frac{11}{14} a^2 \times \frac{1}{3} \frac{b}{2} = \frac{11}{84} a^2 b$;

(a) *Prop. 62. de Sphœ. et Cyl. Caravelli.*

onde saranno i due semisegmenti NMPS, QTRX $= \frac{11}{14}(c^3 - bc^2) - \frac{11}{84} a^2 b = B$.
Sicchè dunque la solidità dei quattro descritti semisegmenti sarà $A+B = \frac{11}{42}(c^3 - ac^2) + \frac{11}{42}(c^3 - bc^2) - \frac{11}{84} b^2 a - \frac{11}{84} a^2 b = \frac{22}{84}(c^3 - ac^2) + \frac{22}{84}(c^3 - bc^2) - \frac{11}{84} b^2 a - \frac{11}{84} a^2 b =$
$\frac{44c^2 - 22ac^2 - 22bc^2 - 11b^2 a - 11 a^2 b}{84}$.

L' Emisfero LBn $= \frac{11}{21} c^2 \times \frac{c}{2} = \frac{11}{42} c^3$;
onde l' anima della Volta di già descritta, cioè NSPKQTRIB $= \frac{11}{42} c^3 - \frac{44c^3 + 22ac^2 + 22bc^2 + 11b^2 a + 11a^2 b}{84} = \frac{22c^3 - 44c^3 + 22ac^2 + 22bc^2 + 11b^2 a + 11a^2 b}{84} = \frac{2ac + 22bc^2 + 11b^2 a + 11a^2 b - 22c^3}{84} = \frac{22c^2 + 11ab}{84}(a + b) - \frac{22c^3}{84} = \frac{11}{84}(2c^2 + ab)(a+b) - \frac{11}{42} c^3$.

Sicchè dunque per avere il valore della solidità della descritta Volta a vela col reguglio, essendo data la lunghezza, la larghezza, la diagonale, e la grossezza alla cima, devesi

I. Moltiplicare la lunghezza, per la larghez-

ghezza, e per la somma del sesto maggiore, reguglio, e grossezza alla cima, ed il prodotto si noti.

II. Si unisca il duplo dei quadrati fatti sopra la lunghezza e larghezza, col prodotto della lunghezza per la larghezza, e la somma si noti.

III. Si moltiplichi la notata somma, per la somma della lunghezza, e larghezza, ed il prodotto si noti.

IV. Dopo i due numeri costanti 84, 11, ed il detto prodotto, si trovi un quarto proporzionale, e si noti.

V. Dopo i due numeri costanti 42, 11, ed il cubo fatto dalla diagonale, si trovi un altro quarto proporzionale, e si noti.

VI. Indi dal primo quarto proporzionale, se ne tolga il secondo, ed il residuo si noti.

VII. Finalmente dal primo prodotto notato nel n. I. se ne tolga il detto residuo, e lo eccesso sarà la solidità della descritta Volta a vela.

Sia, per esempio, la lunghezza 20, la larghezza 15; la diagonale sarà 25: e sia grossa alla cima 1, il sesto maggiore sarà 10, il primo prodotto sarà 4050; la somma detta nel n. II. sarà 1550, il prodotto notato nel n. III. sarà 54250, il primo quarto proporzionale sarà $7104\frac{1}{6}$. Inoltre il cubo fatto

dalla diagonale si è 15625, ed il secondo quarto proporzionale sarà $4092\frac{11}{42}$. Lo eccesso dei detti due quarti proporzionali sarà $3011\frac{19}{21}$, questo sarà l'anima di detta volta, che detraendolo dal primo prodotto 4050, il residuo $1038\frac{2}{21}$, sarà il valore della solidità della descritta Volta a vela col regnglio.

CAP-

CAP. IX.

Della superficie delle varie specie di Volta a vela col reguglio.

AVVERTIMENTO. IV.

Essendo eguale il numero delle specie delle Volte a vela col reguglio di quelle senza reguglio, ci serviremo perciò delle stesse figure, supponendo sempre esservi il ségmento verticale di dette Volte.

PROBLEMA I.

Trovare la ragion che passa tra la superficie laterale di un parallelepipedo, che ha la medesima base, e la stessa altezza colla Volta a vela sferica col reguglio, e la superficie di detta Volta.

Sia l' anima della Volta sferica col reguglio NPQRB, trovare la ragion che passa tra la superficie laterale del parallelepipedo, che ha per base il quadrato NQ, e per altezza OB, e la superficie di detta Volta. *Tav. II. Fig. 17.*

Sia $NP = PQ = a$; sarà $NQ = Ln = \sqrt{2a^2}$;
2S

$2S = uK = Oa = On = \frac{a}{2}$;

sarà ancora $OP = ON = OL = \frac{\sqrt{2}a_2}{2}$,

ed $LV = un = On - Ou = \frac{\sqrt{2a^2} - a}{2} = \frac{\sqrt{2a^2} - a}{2}$,

ed $nK = \frac{\sqrt{4a^2 - \sqrt{2a^2}2}}{2}$;

onde la superficie dello Emisfero sarà $= \frac{22}{7} \sqrt{2a^2} \times \frac{\sqrt{2a^2}}{2} = \frac{22}{7} a^2$.

Le superficie dei quattro semisegmenti laterali NMPS, QnQK, QXRT, RLNI, siccome si è detto nel Probl. Cap. VI. $= \frac{22}{7}(2a^2 - a^2\sqrt{2})$ sicchè la superficie dell' Emisfero tronco, o sia dell' Emisfero, dedottine le superficie dei detti quattro semisegmenti $= \frac{22}{7}a^2 - \frac{22}{7}(2a^2 + a^2\sqrt{2}) = \frac{22\ a^2\sqrt{2} - 5 2a^2}{7}$;

ma la superficie laterale del parallelepipedo, che ha per base il quadrato NQ, e per altezza $OB = 4a \times \frac{\sqrt{a_2{}^2}}{2} = \frac{4a^2\sqrt{2}}{3}$;

sicchè dunque la superficie laterale del parallelepipedo, che ha per base il quadrato NQ, e per

e per altezza OB sta alla superficie della Volta sferica col reguglio, come $\frac{4a^2\sqrt{2}}{2}$:

$\frac{22a^2\sqrt{2}-22a^2}{7}$, ovvero come $28a^2\sqrt{2}$: $44a^2\sqrt{2} - 44a^2$; e dividendo tutti i termini per a^2; si avrà che la superficie laterale del parallelepipedo che ha la medesima base, e la stessa altezza colla Volta a vela sferica col reguglio, stia alla superficie di detta Volta come $28\sqrt{2}$: $44\sqrt{2} - 44$, ovvero come 39. 592 : 18. 216, oppure come 39592 : 18216, e riducendola a minimi termini sarà di 4949 : 2277. Ciocchè si andava cercando.

AVVERTIMENTO.

Per avere il valore della superficie di una Volta sferica col reguglio, essendo noto il lato del quadrato sopra del quale è formata la detta Volta, e l'altezza di essa, devesi

I. Moltiplicare il perimetro del quadrato, sopra del quale è formata la detta Volta, per l' altezza di essa, ed il prodotto si noti.

II. Dopo i due numeri costanti 4949, 2277, ed il detto prodotto, si trovi un quarto proporzionale, il quale sarà il valore della superficie di detta Volta.

Sia, per esempio, una Volta a vela sferica

ca col reguglio, la di cui larghezza NP = 10, ed essendo sferica sarà PQ = 10; ed aS = 5; ed OB = $7\frac{7}{100}$; la somma dei quattro lati NP, PQ, QR, RN, sarà 40, la quale moltiplicata per OB, il prodotto sarà $282\frac{4}{5}$. Indi trovisi dopo i due numeri costanti 4949 2277, ed il detto prodotto $282\frac{4}{5}$ il quarto proporzionale $130\frac{11}{100}$ questo sarà il valore della superficie nella Volta a velo sferica col reguglio.

PROBLEMA II.

Trovare la ragion, che passa tra il quadrato NQ, che è base della Volta a vela sferica col reguglio, e la superficie di detta Volta.

Fig. 17. SI è detto nel problema precedente, che la superficie della Volta a vela sferica col reguglio, ossia la superficie dell' Emisfero tronco sia $\frac{22a^2\sqrt{2}}{7} - 22a^2$.

Ma la superficie del quadrato NQ = a^2; dunque la superficie del quadrato NQ, sta alla superficie della Volta sferica col reguglio nella ragione di a^2 $\frac{22a^2\sqrt{2}}{7} - 22a^2$, ovvero come $7a^2 : \frac{22a^2\sqrt{2}}{7} - 22a^2$; e dividendo tutti

i termini per a^2; si avrà, che il quadrato NQ, sta alla superficie della Volta a vela sferica col reguglio, come $7 : 22\sqrt{2} - 22$, ovvero come $7 : 9.108$, oppure $7000 : 9108$, che vale a dire, come $1750 : 2277$. Ciocchè si andava cercando.

AVVERTIMENTO.

Per avere il valore della superficie di una Volta a vela sferica col reguglio, si puole usare quest' altra regola; cioè

I. Moltiplicare la lunghezza per la larghezza di detta Volta, ed il prodotto si noti.

II. Dopo i due numeri costanti 1750, 2277, ed il detto prodotto si trovi un quarto proporzionale, questo sarà il valore della detta superficie, siccome infatti adattando la detta operazione nel caso proposto nell' Avvertimento del Problema I. si avrà lo stesso valore per la superficie di detta Volta.

TEO-

TEOREMA I.

La superficie laterale di un parallelepipedo, che ha la stessa base, e la medesima altezza colla Volta a vela col reguglio di seconda specie, sta alla superficie di detta Volta, come 4949: 2277.

Tav. III Fig. 22. SUppongasi il parallelepipedo DP, avere per altezza il semiasse minore HI, questo taglierà solamente gli semisegmenti GADg, DSKM, KBQC, QTGO; così ancora suppongasi del parallelepipedo eR, il quale si farà circonscritto alla Volta a vela sferica col reguglio. La superficie dello semisferoide depresso, sta alla superficie dell' Emisfero, che ha per diametro l' asse minore, come l' asse maggiore, all' asse minore (*a*); ovvero come DH: eH, oppure come DL: eN (*b*); ma la superficie dello semisferoide, sta alla superficie dello Emisfero, che ha per diametro l' asse minore, come le superficie dei semisegmenti sferoidici GADg, DSKM, KBQC, QTGO, alle superficie dei semisegmenti sferici corrispondenti, (*c*), e permutando, e conver-

(a) *Teor. 3. Cap. 7.*
(b) *Schol. 1. Teor. 2. lib. 6.*
(c) *Corol. 4. Teor. 3. Cap. 7.*

vertendo, la superficie dello semisferoide, sta alla superficie dello detto semisferoide, meno le superficie dei detti semisegmenti, cioè alla superficie della Volta a vela col reguglio di seconda specie, come la superficie dell' Emisfero, alla superficie della Volta a vela sferica; dunque permutando, la superficie dello semisferoide, sta alla superficie dell'Emisfero, che ha per diametro l'asse minore, come la superficie della Volta a vela col reguglio di seconda specie, alla superficie della Volta a vela col regnglio di prima specie: ma la superficie dello semisferoide, sta alla superficie del detto Emisfero, come DL: eN, ovvero come la somma dei quattro lati DK, KQ, QG, GD, alla somma dei quattro lati eh, hi, il, le, oppure come la superficie laterale del parallelepipedo, che ha per base DQ, e per altezza HI, alla superficie laterale del parallelepipedo, che ha per base il quadrato ei, e per altezza HI, avendo eguali altezze: dunque permutando, la superficie laterale del parallelepipedo circonscritto alla Volta a vela col reguglio di seconda specie, sta alla superficie di detta Volta, come la superficie laterale del parallelepipedo circonscritto alla Volta sferica col reguglio, alla superficie di detta Volta; ma la superficie laterale del parallelepipedo circonscritto alla Volta sferica col reguglio, sta alla superficie di detta Volta,

co-

come 4949 : 2277 (a) ; dunque la superficie laterale del parallelepipedo circonscritto alla Volta a vela col reguglio di seconda specie , sta alla superficie di detta Volta , come 4949 : 2277. Ciocchè doveasi dimostrare.

AVVERTIMENTO

Per avere il valore di una Volta a vela sferica col reguglio di seconda specie, essendo cognito il lato del quadrato, sopra del quale essa è formata , ed essendo noto il sesto, ed il reguglio, devesi

I. Moltiplicare la somma dei quattro lati del quadrato, che gli serve di base, per la somma del sesto , e reguglio, ed il prodotto si noti.

II. Dopo i due numeri costanti 4949. 2277, ed il detto prodotto, trovisi un quarto proporzionale ; questo sarà il valore della superficie di detta Volta.

TEO-

(a) *Probl. 1. Cap. 9.*

TEOREMA II.

La superficie della base della Volta a vela col reguglio di terza specie, sta alla superficie di detta volta, come 1760: 2277.

SUppongasi non tagliati li segmenti verticali tanto nello semisferoide, quanto nello Emisfero. Per lo Teoremo IV. Cap. VII. la superficie dello semisferoide, sta alle superficie de' semisegmenti tagliati da' piani eretti sopra i lati del rettangolo mMCg, i quali siano perpendicolari al detto rettangolo, come la superficie dell' Emisfero, che ha per diametro l' asse minore, alle superficie de' semisegmenti, sferici corrispondenti; e convertendo, e permutando la superficie dello semisferoide, sta alla superficie dell' Emisfero, che ha per diametro l' asse minore, come la superficie del detto semisferoide, meno le superficie de' detti semisegmenti, ossia la superficie della Volta a vela col reguglio di terza specie, alla superficie di detto Emisfero, meno le superficie de' semisegmenti sferici, ossia la superficie della Volta a vela sferica: ma la superficie dello semisferoide, sta alla superficie dello Emisfero, che ha per diametro l' asse minore come l' asse maggiore, al-

Tav. III. Fig. 2.

l' asse minore (*a*), ovvero come mM, ad iN (*b*), oppure come il rettangolo mMCg, al quadrato iNFf; dunque il rettangolo mC, sta al quadrato iF, come la superficie della Volta a vela col reguglio di terza specie alla superficie della Volta a vela sferica; e permutando il rettangolo mC, che è base della Volta a vela col reguglio di terza specie, sta alla superficie di detta Volta, come il quadrato iF, sta alla superficie della Volta a vela sferica: ma il quadrato iF, sta alla superficie della Volta a vela sferica, come 1750 : 2277 (*c*); dunque la base della Volta a vela col reguglio di terza specie, sta alla superficie di detta Volta anche come 1750: 2277. Ciocchè si dovea dimostrare.

AVVERTIMENTO.

Per avere il valore della superficie di una Volta a vela col reguglio di terza specie, essendo cognita la lunghezza, e la larghezza devesi.

I. Moltiplicare la lunghezza, e la larghezza, ed il prodotto si noti.

II. Dopo i due numeri costanti 1750, 2277, ed il detto prodotto si trovi un quarto

(a) *Teor. 3. Cap. 7.*
(b) *Corol. 1. Teor. 3. Cap. 1.*
(c) *Probl. 2. Cap. 9.*

to proporzionale, questo sarà il valore della superficie della detta Volta.

TEOREMA III.

La superficie della base della Volta a vela col reguglio di quarta specie, sta alla superficie di detta Volta, come 1750 : 2277.

LA dimostrazione è la stessa del Teorema peccedente adattandola alla figura 23.

AVVERTIMENTO

Per avere il valore della superficie della Volta a vela col reguglio di quarta specie, devesi

I. Moltiplicare la lunghezza per la larghezza, ed il prodotto si noti.

II. Dopo i due numeri costanti 1750, 2277 ed il detto prodotto, si trovi un quarto proporzionale, questo sarà il valore della superficie della detta Volta.

TEOREMA IV.

La superficie laterale del parallelepipedo circonscritto alla Volta a vela col reguglio di quinta specie, sta alla superficie di detta Volta, come 4949: 2277.

Tav. III. Fig. 24

SUppongasi non tagliati gli segmenti verticali tanto nello sferoide, quanto nell'Emisfero, e concepiscansi i parallelepipedi innalzati sopra il quadrato bf, avere per altezza, quelle istesse dello semisferoide, e dell'Emisfero; quello che ha per altezza, l'altezza medesima dello semisferoide diviso per l'asse minore, sarà circonscritto alla Volta a vela col reguglio di quinta specie, e quello, che ha per altezza, l'altezza medesima dell'Emisfero, che ha per diametro l'asse minore, sarà circonscritto alla Volta a vela sferica col reguglio: onde facendo lo stesso raziocinio di quello nel Teorema I. del corrente Capitolo, si avrà, che la superficie laterale del parallelepipedo circonscritto alla Volta a vela col reguglio di quinta specie, sta alla superficie di detta Volta, come la superficie del parallelepipedo circonscritto alla Volta a vela sferica col reguglio, alla superficie di detta Volta: ma la superficie laterale del parallelepipedo circonscritto alla Vol-

Volta a vela sferica, sta alla superficie di detta Volta, come 4949 : 2227. (a): dunque la superficie laterale del paralielepipedo circonscritto alla Volta a vela col reguglio di quinta specie, sta alla superficie di detta Volta, come 4949 : 2277. Ciocchè doveasi dimostrare.

AVVERTIMENTO.

Sicchè per avere il valore di una Volta a vela di quinta specie col reguglio, essendo noto il lato del quadrato, sopra del quale essa è formata, ed essendo cognito il sesto, ed il reguglio, devesi

I. Moltiplicare la somma de' quattro lati di esso quadrato, ch' è base di detta Volta, per la somma del sesto, e del reguglio, ed il prodotto si noti.

II. Dopo i due numeri costanti 4949, 2277, ed il detto prodotto si trovi un quarto proporzionale, questo sarà il valore di detta Volta.

(a) *Probl. 1. Cap. 9.*

TEOREMA V.

La superficie laterale di un parallelepipedo circonscritto ad una Volta a vela col reguglio di sesta specie, sta alla superficie di detta Volta, nella ragione di 4949 : 2277.

Tav. III. Fig. 27. SUppongansi i parallelepipedi EC, TM, avere per altezza comune la YL, ch' è semiasse minore. La superficie dello semiellittoide, sta alla superficie dell' Emisfero, come le superficie de' semisegmenti GgEM, EBFN, FhHO, HAGP, alle superficie de' semisegmenti sferici corrispondenti (*a*), e permutando, e convertendo la superficie dello semiellittoide, sta alla superficie del detto semiellittoide, meno le superficie de' detti semisegmenti Ellittoidici, ossia la superficie della Volta a vela col reguglio di sesta specie, come la superficie dell' Emisfero, alla superficie della Volta a vela sferica col reguglio; e permutando la superficie dello semillittoide, sta alla superficie dell' Emisfero, che ha per diametro l' asse minore, come la superficie della Volta a vela di sesta specie, alla superficie della Volta a vela sferica: ma la superficie dello semiellittoide, sta alla superfice dell'

(*a*) *Corol. 3. Teor. 10. Cap. 7.*

dell' Emisfero, che ha per diametro l'asse minore, come la somma dell' asse maggiore, e dell' asse medio, al duplo asse minore, (a), ovvero come la somma di GE, EF, alla somma QT, TS; dunque la somma di GE, EF, ossia il perimetro del rettangolo EH, sta al perimetro del quadrato TR, come la superficie della Volta a vela di sesta specie, alla superficie della Volta sferica. Ma il perimetro del rettangolo EH, sta al perimetro del quadrato TR, come la superficie laterale del parallelepipedo, che ha per base il rettangolo EH, e per altezza LY, alla superficie laterale del parallelepipedo, che ha per base il quadrato TR, e per altezza lo stesso LY, e questi sono i parallelepipedi circonscritti alla Volta di sesta specie, ed alla sferica: dunque la superficie laterale del parallelepipedo circonscritto alla Volta a vela di sesta specie, sta alla superficie laterale di un parallelepipedo circonscritto alla Volta a vela sferica, come la supecficie di detta Volta a vela di sesta specie, alla superficie della Volta a vela sferica, e permutando la superficie laterale del parallelepipedo circonscritto alla Volta a vela di sesta specie, sta alla superficie di detta Volta, come la superficie laterale del parallelepipedo circonscritto alla Volta a vela sferica,

(a) *Teor. 11. Cap. 7.*

alla superficie di essa Volta a vela: ma la superficie laterale del parallelepipedo circonscritto alla Volta a vela sferica, sta alla superficie di detta Volta, come 4949 : 2277. (a); dunque la superficie laterale del parallelepipedo circonscritto alla Volta a vela col reguglio di sesta specie, sta alla superficie di detta Volta, come 4949 : 2277. Giocchè doveasi dimostrare.

AVVERTIMENTO I.

Sicchè per avere il valore della superficie di una Volta a vela col reguglio di sesta specie, essendo cognita la lunghezza, la larghezza, il sesto, ed il reguglio devesi

I. Moltiplicare la somma della lunghezza, e larghezza, per la somma del sesto, e reguglio, ed il prodotto si noti.

II. Dopo i due numeri costanti 4949, 2277, ed il detto prodotto si trovi un quarto proporzionale; questo sarà il valore della superficie della Volta di sesta specie.

AVVERTIMENTO II.

Sicchè dunque per avere il valore della superficie di qualunque specie di Volta a vela col

(a) *Probl. 1. Cap. 9.*

col reguglio, è necessario prima conoscere di quale specie ella sia; a due classi si son ridotte in questo Capitolo, cioè se una tale Volta è di prima, seconda, quinta, o sesta specie, vale a dire che sia formata sopra un quadrato, e sopra i lati di esso vi siano eretti semicerchi, o semiellissi, ovvero sia formata sopra un rettangolo, e sopra i lati vi siano erette semiellissi, e queste sono abbracciate dalla prima classe, e per avere il valore della superficie di ciascuna di esse, devesi

I. Moltiplicare il perimetro della base della Volta, per la somma del sesto, e reguglio, ed il prodotto si noti.

II. Dopo i due numeri costanti 4949, 2277, ed il detto prodotto, trovisi un quarso proporzionale, questo sarà il valore della superficie della Volta, che si va cercando, siccome si è detto nell' Avvert. Probl. I.; Avvertim. Teor. I.; Avvertim. Teor. IV.; Avvert. Teor. V. di questo Capitolo.

La seconda Classe poi abbraccia quelle Volte, che sono formate sopra rettangoli, e sopra due de' lati del detto rettangolo vi siano eretti due semicerchi, e sopra gli altri due lati, due semiellissi; per averne il valore della superficie di ciascuna di esse, devesi

I. Moltiplicare la lunghezza, per la larghezz., ed il prodotto si noti.

II. Dopo i due numeri costanti 1750, 2277,

2277, ed il detto prodotto, si trovi un quarto proporzionale, questo sarà il valore della superficie della Volta, che si va cercando; siccome si è detto negli Avvertimenti de' Teor. II., III. di questo Capitolo.

AVVERTIMENTO III.

Eccetto delle descritte Volte a vela col reguglio, se ne puole formare un' altra, siccome si è detto nell' Avvert. III. Teor. V. Capitolo VIII, nel quale si è fatto vedere come si trovi la sua solidità: ora è necessario per terminar questo Capitolo trovare una formola generale per avere il valore della superficie di essa.

Tav. IV Fig. 33. Facciasi uso della stessa preparazione fatta in detto Avvertimento; saranno le superficie de' semisegmenti NMPS, QXRT $= \frac{11}{7}(c^2 - bc)$

E le superficie de' due semisegmenti PnQK, KLRI $= \frac{11}{7}(c^2 - ac)$

Onde le superficie de' quattro descritti semisegmenti saranno $= \frac{11}{7}(c^2 - bc) + \frac{11}{7}(c^2 - ac)$

$= \frac{22}{7}c^2 - \frac{11}{7}bc - \frac{11}{7}ac$;

ma la superficie dello Emisfero è uguale ad $\frac{11}{7}c^2$:

dunque la superficie della Volta a vela della natura detta nel detto Avvert. III Teor. V. Capitolo VIII. sarà $= \frac{11}{7}c^2 - \frac{22}{7}c^2 + \frac{11}{7}bc +$

$\frac{11}{7}$

$\frac{11}{7} ac = \frac{11}{7} c(a + b) - \frac{11}{7} c^2$.

Sicchè dunque per avere il valore della superficie di una tal sorte di Volta a vela col-reguglio, devesi

I. Moltiplicare la diagonale del rettangolo sopra del quale è formata la detta Volta, per il numero costante 11, ed il prodotto si noti.

II. Dopo il numero costante 7, il detto prodotto, e la somma della lunghezza, e larghezza, si trovi un quarto proporzionale, e si noti.

III. Dopo i due numeri costanti 7, 11, ed il quadrato della detta diagonale, si trovi un altro quarto proporzionale, e si noti.

IV. Finalmente dal primo quarto proporzionale, se ne tolga il secondo, ed il residuo sarà il valore della superficie di detta Volta: siccome infatti facendo una tale operazione nel proposto esempio nell' Avvert. III. Teor. V. Cap. VIII., la superficie sarà $392\frac{43}{50}$.

CA-

CAP. X.

Della solidità delle varie specie di Volta a Crociera senza reguglio.

DEFINIZIONI.

Tav. IV. Fig. 34. I. *Volta a crociera* è quel solido, che vien sostenuto sopra quattro archi, e diagonalmente vi sono gli spigoli, e cuopre una pianta quadrangolare.

II. Se dalle cime di due archi opposti si tiri una retta, se questa si combacerà col curvo di detto solido, allora si dirà *Volta a crociera senza reguglio*; ma se la intersezione de' spigoli oltrepasserà la detta retta, si chiamerà *Volta a crociera col reguglio.*

AVVERTIMENTO.

Vien generato un tal solido dall' incontro di due parallelepipedi cilindri cavi, i quali con la di loro interna cavità formano la superficie curva del detto solido, e della detta Volta a crociera. Sia il Parallelepipedo semicilindro Cavo LAMBERTI, il quale s' intersechi coll' altro semicilindro cavo MHTPBLQR, il solido LAMHTIRQLN, sarà la solidità della detta Volta a crociera.

Dalla generazione di detta Volta a crocie-

ra

ra senza reguglio, se ne deduce, che di tre specie puole essere una tale Volta. I. Quando gli archi formati sopra i quattro lati del quadrangolo si fanno semicircolari, ed in questo caso il quadrangolo sarà equilatero, ed i due semicilindri, che s' intersecano sono semicircolari. II. Quando gli archi formati sopra due lati si fanno semicircolari, e gli altri due saranno semiellitici, ed allora il quadrangolo non sarà equilatero, ed i due semicilindri, uno sarà semicircolare, e l'altro semiellittico. III. Finalmente quando i quattro archi, che sostengono la Volta si fanno semiellitici, ed allora il quadrangolo puole essere equilatero, e non equilatero, ed i due semicilindri saranno semiellittici.

TEOREMA.

Il parallelepipedo circonscritto all' anima di qualunque specie di Volta a crociera senza reguglio, sta alla solidità di detta Volta, come 21 : 2.

SIa il parallelepipedo semicilindro cavo LAMBERTI, intersecato col parallelepipedo semicilindro cavo MHTPBLQR: dico, che il parallepipedo LP, stia alla solidità della Volta a crociera, come 21: 2. *Tav. IV Fig. 34.*

Il parallelepipedo LP, sta al semicilindro LA-

LAMTIR, come 14 : 11 (*a*), e lo stesso parallelepipedo LP, sta al semicilindro MHTRQL, come 14 : 11; onde il parallelepipedo LP, sta ai detti due semicilindri, come 14 : 22; ma il semipoliedro LMTRN, è, $\frac{2}{3}$ del parallelepipedo LP (*b*) di qualunque natura sia; e da' detti due semicilindri deducendone il detto semipoliedro, il quale sarà $9\frac{1}{3}$, essendo comune all' uno, ed all' altro semicilindro: dunque si avrà il parallelepipedo LP, alli detti due semicilindri, meno il detto semipoliedro, ossia all' anima dello Volta a crociera senza reguglio, come 14. $12\frac{2}{3}$, ovvero come 42 : 38, oppure come 21 : 19; sicchè convertendo, il parallelepipedo circonscritto all' anima della Volta a crociera, sta alla solidità di detta Volta, come 21 : 2. Ciocchè doveasi dimostrare.

AVVERTIMENTO.

Per avere il valore della solidità di qualunque Volta a crociera senza reguglio di qualunque specie ella sia, essendo nota la lunghezza, la larghezza, il sesto, e la grossezza alla cima, devesi.

I. Moltiplicare la lunghezza per la larghez-

(a) *Teor. 1. Cap. 1.*
(b) *Avvert. 3. Teor. 9. Cap. 3.*

hezza, e per il sesto, ed il prodotto si noti.

II. Dopo i due numeri costanti 21, 2, l il detto prodotto, si trovi un quarto proorzionale, e si noti.

III. Si unisca al detto quarto proporzionale, il prodotto della lunghezza, per la larhezza, e per la grossezza della cima, la mma sarà il valore della solidità di detta olta a crociera.

Sia, per esempio, la lunghezza MT, di a Volta a crociera = 20; la larghezza M = 18; il sesto AE = HG = 6; e sia ossa alla cima 1. Il parallelepipedo LP, rà 2160, ed il quarto proporzionale dopo due numeri costanti 21, 2, ed il prodot- 2160, sarà $205\frac{5}{7}$, al quale aggiuntovi il solo parallelepipedo, che ha per base il retngolo EP, e per altezza la grossezza della na, il quale sarà 360; la somma $565\frac{5}{7}$, rà il valore della solidità di detta Volta a ociera data.

CA-

CAP. XI.

Della superficie delle varie specie di Volta a crociera senza reguglio.

DEFINIZIONE.

PEr superficie di Volta a crociera senza reguglio, s' intende la superficie convessa di due qualsivogliano semicilindri, che s' incrocicchiano. Siano i due semicilindri LAMTIR, MHTRQL, incrocicchiati; la superficie della detta Volta a crociera, sarà la somma delle superficie de' quattro triangoli cilindrici LAMN, MHTN, TIRN, RQLN; vale a dire, che la superficie della Volta a crociera è uguale alla somma delle superficie de' semicilindri, che la formano, meno la superficie del semipoliedro LMTRN.

PRO-

PROBLEMA I.

Trovare una formola generale per avere il valore della superficie di una Volta a crociera di prima specie; cioè che abbia i quattro archi, che la sostengano semicircolari.

Sia la MT = LM = a; AE = HG = $\frac{a}{2}$ *Tav.IV Fig.34.*

La superficie del semicilindro LAMTIR, sarà
$= \frac{11}{14}(2a)\ a\ (a) = \frac{11}{7}\ a^2 = A$
E la superficie del semicilindro MHTRQL, essendo eguale a quella di LAMTIR, sarà
ancora $= \frac{11}{7}\ a^2 = B$
La superficie, la semipoliedro LMTRN, sarà
$2a^2\ (b) = C$
Onde la superficie della Volta a crociera senza reguglio di prima specie, sarà per la definizione precedente $A+B-C = \frac{22}{7}\ a^2 - 2a^2 = a^2 - \frac{14}{7}\ a^2 = \frac{8}{7}\ a^2$. Ciocchè si andava cercando.

R Vol-

(a) *Teor. 1. Cap. 2.*
(b) *Corol. 4. Teor. 2. Cap. 3.*

AVVERTIMENTO.

Per avere il valore della superficie di una Volta a crociera senza reguglio di prima specie, cioè che sia formata sopra una pianta quadrata, e gli archi che la sostengono, siano semicircolari, devesi

I. Moltiplicare uno dei suoi lati per se medesimo, ed il prodotto si noti.

II. Dopo i due numeri costanti 7, 8, ed il detto prodotto, si trovi un quarto proporzionale, e questo sarà il valore della superficie di una tale Volta.

Sia, per esempio, MT = LM = 20, sarà AE = HG = 10; il quadrato MTRL, sarà 400; indi facciasi, come 7, ad 8, così 400 al quarto proporzionale 457 $\frac{1}{7}$, e questo sarà il valore della superficie di detta Volta a crociera di prima specie senza reguglio.

PROBLEMA II.

Trovare una formola generale per avere il valore della superficie di una Volta a crociera senza reguglio di seconda specie; cioè, che abbia gli archi che la sostengano due semicircolari, e due semiellittici.

Sia LM = a; MT = b; ed essendo l'arco LAM, semicircolare sarà AE = HG $\frac{a}{2}$. Tav. IV. Fig. 31.

e sia la corda HM, del semiarco HM, eguale ac.

La superficie del semicilindro LMTIR = $\frac{11}{14}(2a)\,b = \frac{11}{7}\,ab$ = A (a)

La superficie del semicilindro Ellittico MHT RQL = $\frac{5141}{2828}(2c)\,a = \frac{5141}{1414}\,ac$ = B (b)

La superficie del semipoliedro LMTRN = $(2a+2b)\,\frac{a}{2} = a^2 + ab$ = C (c)

Onde la superficie di detta Volta, secondo la definizione di questo Capitolo sarà A+B−C

$$= \frac{11}{7}$$

R 2

(a) *Avvert. 1. Teor. 1. Cap. 2.*
(b) *Avvert. 1. Teor. 3. Cap. 2.*
(c) *Avvert. 3. Teor. 9. Cap. 3.*

$= \frac{11}{7}ab + \frac{3141}{1414}ac - a^2 - ab = \frac{4}{7}ab + \frac{3141}{1414}ac - a^2$

Ciocchè si andava cercando.

AVVERTIMENTO.

Per avere il valore della superficie di una Volta a crociera senza reguglio di seconda specie, cioè che sia formata sopra una pianta rettangolare, e sopra due lati di essi vi siano eretti due semicerchi, e sopra gli altri due lati, due semiellissi, devesi

I. Dopo i due numeri costanti 7, 4, ed il prodotto della lunghezza per la larghezza, trovare un quarto proporzionale, e si noti.

II. Dopo i due numeri costanti 1414, 3141, ed il prodotto del diametro del semicerchio per la corda del semiarco Ellittico, si trovi un altro quarto proporzionale, e si noti.

III. Finalmente dalla somma dei due descritti quarti proporzionali, se ne tolga il quadrato formato sopra il diametro del semicerchio, ed il residuo sarà il valore della superficie di detta Volta.

Sia, per esempio, $a = 8$; $b = 6$; sarà la corda del semiarco Ellittico, ch' è $c = 5$; poichè AE = GH, sarà 4, e GM = 3; si faccia come 7, a 4; così il prodotto della lunghezza per la larghezza, ch' è 48, al quarto proporzionale $27\frac{3}{7}$, e si noti. Indi dopo i due nu-

numeri costanti 1414, 3141, ed il prodotto del diametro del semicerchio, per la corda del semiarco Ellittico, ch'è 40, si trovi il quarto proporzionale $88\frac{604}{707}$. Si uniscano i quarti proporzionali, e dalla loro somma $116\frac{200}{707}$ se ne tolga il quadrato del detto diametro ch'è 64, il residuo $52\frac{200}{707}$, sarà il valore della superficie di detta Volta a crociera di terza specie.

PROBLEMA III.

Trovare una formola generale per avere il valore della superficie di una Volta a crociera senza reguglio di terza specie; cioè, che sia formata sopra una pianta rettangolare, e gli archi, che la sostengono, siano semiellittici.

Sia LM = a; MT = b; e sia HM = c ed AM = d; così ancora AE = HG = e la superficie del semicilindro Ellittico LAM TIR = $\frac{3141}{2828}(2d)\,b = \frac{3141}{1414}db = A\,(a)$ *Tav. IV Fig. 34.*

La superficie del semicilindro MHTRQL = $\frac{3141}{2828}(2c)\,a = \frac{3141}{1414}ac = B$

(a) *Avvert. 1. Teor. 3. Cap. 2.*

La superficie del semipoliedro LMTRN = $(2a + 2b)e = 2ae + 2be = C(a)$;
onde la superficie di detta Volta secondo la definizione di detto Capitolo sarà $A + B - C = \frac{3141}{1414} db + \frac{3141}{1414} ac - 2ae - 2be = \frac{3141}{1414} db + \frac{3141}{1414} ac - 2e(a+b)$. Ciocchè si dovea trovare.

AVVERTIMENTO I.

Per avere il valore della superficie di una Volta a crociera senza reguglio di terza specie, la quale sarà formata sopra una pianta rettangolare, e gli archi, che la sosteugono siano semiellittici, essendo data la lunghezza, la larghezza, il sesto, e le corde delle metà degli archi innalzati sopra la lunghezza, e larghezza, devesi

I. Dopo i due numeri costanti 1414, 3141, e la somma dei due prodotti, uno fatto dalla lunghezza per la corda della metà dell'arco innalzato sopra la larghezza, e l'altro fatto dalla larghezza per la corda della metà dell'arco innalzato sopra la lunghezza, trovasi un quarto proporzionale e si noti.

II. Dal descritto quarto proporzionale se ne tolga il prodotto del duplo sesto, per la somma della lunghezza, e larghezza, il residuo sarà il valore della superficie di detta Vol-

(a) *Avvert. 3. Teor. 9. Cap. 3.*

Volta a crociera sonza reguglio di terza specie.

Sia, per esempio, la lunghezza $b = 12\frac{2}{3}$; la larghezza $a = 8$; il sesto $e = 3$; la suttesa d sarà 5; e la suttesa c, presso a poco sarà 7. Il prodotto della lunghezza per la suttesa della metà dell' arco innalzato sopra la larghezza, sarà $63\frac{1}{3}$; ed il prodotto della larghezza per la suttesa dell' arco innalzato sopra la lunghezza sarà 56; la di loro somma sarà $119\frac{1}{3}$. Trovisi un quarto proporzionale dopo i due numeri costanti 1414, 3141, e la detta somma $119\frac{1}{3}$, che sarà $265\frac{58}{707}$, da questo se ne tolga il prodotto del duplo sesto, per la somma della lunghezza, che sarà 124; il residuo $141\frac{58}{707}$, sarà il valore della superficie di detta Volta a crociera di terza specie.

AVVERTIMENTO II.

Se la lunghezza, si farà eguale alla larghezza, di modo tale che la detta Volta coprirà un edificio di pianta quadrata, e gli archi, che la sostengono anche saranno semiellittici, in tal caso divenendo $a = b$; e $e = d$; la equazione del Problema precedente si ridurrà a $\frac{3141}{707}ac - 4ae$, e per avere il valore della superficie di una tale Volta devesi

I. Dopo i due numeri costanti 707, 3141,

ed il prodotto del lato del quadrato, sopra del quale è formata la detta Volta, per la suttesa della metà di uno de' quattro archi, che la sostengono, trovare un quarto proporzionale, e si noti.

II. Dal detto quarto proporzionale, se ne tolga il quadruplo prodotto del lato del quadrato, pel sesto, il residuo sarà il valore della superficie di detta Volta a crociera di terza specie formata sopra una pianta quadrata.

CA-

CAP. XII.

Della solidità, e della superfi ie dei Poliedri quadriformi generati da Zone sferoidiche.

DEFINIZIONI.

I. Sia BFCI, un settore della Ellissi LEMH, ed AEBI, un settore della Ellissi NEOG. *Tav: IV. Fig. 35.* S'intenda ora girare il settore BFCI, intorno al punto I, fisso, ed immobile, ed il punto F, medio dell'arco BFC, per la direzione del semicircolo FKH, fintantocchè giunga nella situazione del settore opposto AHDI; nel tempo medesimo, che s'intende fare la descritta rivoluzione, si concepisca la stessa rivoluzione fare al settore, AEBI, intorno allo stesso punto I, fisso, ed immobile; ma la direzione del punto E, medio dell'arco AEB, sia per lo semicerchio EKG, il quale s'intersecherà col primo semicerchio ad angoli retti, e la comune sezione sarà IK. Il sosolido AHDGCFBEK, genorato da tali rivoluzioni, si chiamerà *semipoliedro quadriforme*; se le dette rivoluzioni si fanno per i circoli intieri, allora il solido si dirà *poliedro quadriforme*.

II. La figura AEBFCGDH, si denominerà

nerà *sezione massima*, ossia *base* del semipoliedro.

IIII. La KI, si dirà *semiasse* del poliedro, ovvero *asse* del semipoliedro.

IV. Il punto K, si dirà *vertice* del semipoliedro.

V. Se gli semicerchi FKH, EKG, saranno semiellissi, ed attorno a questo si genera un tal solido, in tal caso, si chiamerà *semipoliedro Ellittoidico*.

VI. Due archi, di Ellissi simili, si dicono *simili*, allora quando comprendono angoli eguali, e detti angoli devono avere i loro vertici nella metà degl' archi, e i lati devono passare per gli estremi dei detti archi.

TEOREMA I.

Tav. IV Fig. 36. SE lo sferoide ABCD, si divida pel piano EF, parallelo alla sezione massima AKC; dico, che la sezione EIFm, sia una Ellissi simile ad AKC.

Per l' asse minore BD, si faccia passare il piano BKDm, il quale sia perpendicolare alla Ellissi ABCD, e per la generazione dello sferoide lungo il piano BKDm, sarà un cerchio. Essendo HC, FG, ordinate al diametro BD; si avrà, che

$\overline{HC}^2 : \overline{FG}^2 =$ rett. DHB : rett. DGB (a);

ma

(a) *Teor. 2. Cap. 1.*

ma il rettangolo fatto da DH, in HB, è uguale al quadrato di HK, ed il rettangolo fatto da DG, in GB, è uguale al quadrato di GI (*a*); dunque

$$\overline{HG}^2 : \overline{FG}^2 = \overline{HK}^2 : \overline{GI}^2$$

ovvero $HC : FG = HK : GI$ (*b*)

Sicchè avendo le due Ellissi EIFm, AKC, gli assi conjugati proporzionali saranno simili tra loro (*c*). Ciocchè doveasi dimostrare.

LEMMA.

Abbia il segmento EBF, la corda EF, parallela all'asse maggiore AC, della Ellissi ABCD, e sia l'angolo EBF, formato col vertice nella metà di detto segmento: dico che l'asse minore BD, divide in due parti eguali l'angolo EBF. *Tav.* IV *Fig.* 37.

Essendo $\overline{CO}^2 : \overline{FI}^2 =$ rett. DOB: rett. DIB (*d*),

così ancora $\overline{AO}^2 : \overline{EI}^2 =$ rett.DOB : rett.DIB;

onde $\overline{CO}^2 ; \overline{FI}^2 = \overline{AO}^2 : \overline{EI}^2$;

e $CO : FI = AO : EI$ (*e*);

ma CO, è uguale ad AO; dunque FI, sarà eguale ad EI; ed essendo BI, comune ai due

(a) *Corol. 1. prop. 14. lib. 2.*
(b) *Prop. 22. lib. 6.*
(c) *Avvert. 1. Teor. 4. Cap. 1.*
(d) *Teor. 2. Cap. 1.*
(e) *Prop. 22. lib. 6.*

due triangoli EBI, FBI, e questi avendo gli angoli EIB, FIB, eguali, come retti; onde sarà l'angolo EBI, eguale all' angolo IBF (a). Ciocchè doveasi dimostrare.

TEOREMA II.

Tav. IV Fig. 37. Siano i due segmenti EBF, ebf, simili, delle due Ellissi simili ABCD, abcd. Dico, che il segmento EBF, sta al segmento ebf, come $\overline{EF}^2 : \overline{ef}^2$, essendo le corde EF, ef parallele agli assi maggiori.

Nelli punti O, o, delle intersezioni degli assi conjugati AC, BD; ac, bd; si facciano centri, e coll' intervallo delli semiassi minori si descrivano i due cerchi BGDH, bgdh, i quali saranno intersecati dalle corde EF, ef, degli archi ellittici; dalli punti B, b, alli punti E, G, H, F, e, g, h, f, si tirino le rette BE, BG, BH, BF, be, bg, bh, bf. Essendo l'angolo EBF, eguale all'angolo ebf (b); ed essendo l'angolo EBI, eguale all' angolo FBI, come ancora l'angolo ebi, eguale all'angolo fbi(c); sarà l' angolo EBI, eguale all' angolo ebi, e l'angolo EIB, come retto, è uguale all' angolo eib: onde il terzo sarà eguale al terzo, e per-

(a) *Prop. 4. lib. 1.*
(b) *Def. 6. Cap. 12.*
(c) *Lemma precedente.*

e perciò i due triangoli EBI, ebi, saranno equiangoli, e sarà

EI : IB = ei : ib (*a*)

e permutando EI : ei = IB : ib;

ma attento alla generazione dell' Ellissi, ed essendo simili tra loro, si avrà

EI : ei = GI : gi;

dunque GI : gi = IB : ib,

e permutando GI : IB = gi : ib;

ma l' angolo GIB, come retto, è uguale all' angolo gib; dunque i due triangoli GIB, gib, saranno equiangoli (b); e perciò gli angoli GBI, gbi, saranno eguali; onde anche i loro dupli GBH, gbh, saranno equali, ed in conseguenza i due segmenti circolari GBH, gbh, saranno simili tra loro (*c*). Inoltre il segmento GBH, sta al segmento EBF, come GI : EI (*d*), nel modo istesso, che il segmento gbh, sta al segmento ebf, come gi : ei; ma si è dimostrato, che

GI : EI = gi : ei;

dunque il segmento GBH. sta al segmento EBF, come il segmento gbh, al segmento ebf; e permutando, il segmento GBH, sta al segmento gbh, come il segmento EBF al segmento ebf; ma il segmento GBH sta al segmen-

(a) *Prop. 4. lib. 6.*
(b) *Prop. 6. lib. 6.*
(c) *Def. 9. lib. 3.*
(p(*l:olo;) 3. Teor. 3. Cap. 1.*

mento gbh, come $\overline{GH}^2 : \overline{gh}^2$ (a); dunque ancora il segmento EBF, starà al segmento ebf, come $\overline{GH}^2 : \overline{gh}^2$, ovvero come $\overline{EF}^2 . \overline{ef}^2$, essendo le corde degli uni, e degli altri proporzionali. Ciocchè bisognava dimostrare.

TEOREMA III.

In una Ellissi, se una retta seca due altre rette parallele, i rettangoli fatti dalle di loro parti saranno proporzionali tra loro.

Tav. IV. Fig. 38. NElla Ellissi ABCD, s' intersechi la retta MN, colle due rette BD, EF, le quali siano parallele tra loro. Dico, che il rettangolo fatto da BO in OD, stia al rettangolo fatto da Ee in eF, come il rettangolo fatto da MO in ON, al rettangolo fatto da Me, in eN.

Si facciano passare per le rette EF, DB, i due piani GK, IK, paralleli tra loro, di maniera che siano sezioni circolari del cono ILK, dal quale è nata la Ellissi ABCD; e pel vertice L, e la retta MN, si faccia passare il piano MLd, il quale segnerà nei due cerchi GH, IK, le due rette ab, ed, le

(a) *Corol. 2. prop. 5. de circ. dim. Caraveli.*

le quali saranno parallele tra loro (*a*). Nel circolo IK, s' intersechino le due rette BD, cd, nel punto O, sarà rett. BOD = rett. cOd (*b*); così ancora nel cerchio GH, sarà rett. EeF = rett. aeb. Onde rett. BOD : rett. EeF = rett. cOd : rett. aeb;

ovvero come (cO : ae
(Od : eb (*c*)

Ma cO : ae = MO : Me (*d*)
ed Od : eb = NO : Ne;
dunque rett. BOD : rett. EeF = (MO : Me
(NO : Ne;

ma la ragion composta di MO : ME, e di NO : NE, e la stessa del rettangolo MON, al rettangolo MeN; sicchè dunque rett. BOD : rett. EeF = rett. MON : rett. MeN. Ciocchè bisognava dimostrare.

TEO-

(a) *Prop.* 16. *lib.* 11.
(b) *Prop.* 35. *lib.* 3.
(c) *Corol. prop.* 23. *lib.* 6.
lib. 6.

TEOREMA IV.

Qualunque sezione fatta nello sferoide, la quale sia obliqua all' asse, sarà una Ellissi.

Tav. IV. Fig. 39. Sia la sezione obliqua EMND, fatta nello sferoide AC; dico, che la sezione EMNO, sia una semiellissi.

Nella retta ED, si prendino due punti ad arbitrio H, I, per i quali si tirino le rette eG, bF, le quali siano parallele tra loro, e perpendicolari all' asse maggiore, e per queste rette si facciano passare i due piani eMG, bNF, i quali siano perpendicolari al piano soggetto AC; e questi attento alla generazione dello sferoide saranno semicerchi. Essendo i piani eMG, bNF, EMND, perpendicolari al piano AC, le communi sezioni HM, IN, saranno perpendicolari al piano AC (*a*), e per conseguenza alle rette eG, bF (*b*). Ciò posto pel Teorema precedente il rettangolo fatto da eH, in HG, sta al rettangolo fatto da bI, in IF, come il rettangolo fatto da EH, in HD, al rettangolo fatto da EI, in ID; ma il rettangolo fatto da

(a) *Prop. 19. lib. 11.*
(b) *Def. 3. lib. 11.*

da eH, in HG, è eguale al quadrato di HM (*a*), e così ancora il rettangolo fatto da bI, in IF, è eguale al quadrato IN; Dunque

$HM^2 : IN^2 =$ rett. EHD: rett. EID;

Ma questa è proprietà della Ellissi; Dunque la sezione obbliqua EMND, fatta in un semisferoide, è semiellissi, Ciocchè bisognava dimostrare.

TEOREMA V.

Qualunque sezione, che si fa nel poiedro quadriforme parallela alla sezione massima, è una figura simile alla detta sezione massima.

(Tav. IV. Fig. 35.)

Sia il semipoliedro quadriforme ABCDK, ecato dal piano acde, parallelo alla sezione massima ABCD. Dico, che la sezione cde, sia simile alla massima ABCD.

Si tirino le diaconali DB, AC, e si conepiscano innalzati sopra le rette AB, AC, H, EG, gli piani DKB, AKC, FKH, KG; le sezioni DKB, AKC, le quali saanno communi alli due semisferoidi LKM, KN, saranno due semiellissi (*b*); e perciò alla formazione del semipoliedro quadriforme, e nascerà dalla figura ADCB, inscritta nel-

S la

(a) *Corol.* 1. *prop.* 14. *lib.* 12.
(b) *Teor. precedente.*

la sezione massima, un semipoliedro Ellittico. Onde la sezione acde, fatta nel semipoliedro Ellittico, sarà una figura simile al quadrilatero ADCB, o sia sezione massima (*a*). Ciò posto dalli punti H, b, alli, punti A, D ed a, c, si tirino le rette HA, HD; ba bc; Ed essendo le due rette HA, HD, che si uniscono nel punto H, parallele alle due rette ba, bc, che si uniscano nel punto b, sarà l'angolo AHD, eguale all'angolo abc (*b*). Onde sarà il segmento AHD, simile al segmento abc, essendo la sezione, la quale passa per acde, nello semisferoide LKM, una Ellissi simile ad LHMF (*c*), Della stessa maniera si può dimostrare di tutti gli altri segmenti cd, de, ea, li quali saranno simili a DC, CB, BA, dunque la sezione acde, sarà simile alla massima ADCB, nel poliedro quadriforme. Ciocchè bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

Essendo la figura quadrilatera ADCB, simile alla figura quadrilatera acde, sarà la figura ADCB, alla figura acde, come AD^2 : ac^2 (*d*); Ma AD^2 : ac^2, come il segmento AHI

(a) *Teor.* 7. *Cap.* 3.
(b) *Prop.* 10. *lib.* 11.
(c) *Teor.* 1. *Cap.* 12.
(d) *Prop.* 20. *lib.* 6.

al segmento abc (*a*); Dunque il segmento AHD, sta al segmento abc, come la figura quadrilatera ADCB, alla figura quadrilatera acde; della stessa maniera si dimostra di tutti gli altri segmenti, che sono nella stessa ragione delle figure quadrilatere: Onde li quattro segmenti AD. DC, CB, BA, stanno alli quattro segmenti ac, cd, de, ea, come il quadrilatero ADCB, al quadrilatero acde; e permutando, e componendo, la sezione massima ADCB, del semipoliedro quadriforme, sta alla sezione acde, fatta nello stesso poliedro, come il quadrilatero ADCB, al quadrilatero acde. Sicchè dunque qualunque sezione che si fa nel semipoliedro quadriforme parallela alla sezione massima, sta alla sezione del semipoliedro ellittico inscritto in detto semipoliedro quadriforme, come la sezione massima del semipoliedro quadriforme, alla sezione massima corrispondente nel semipoliedro Ellittico inscritto.

AVVERTIMENTO.

Se si concepisca il semipoliedro quadriforme, ADCBK, diviso in uno infinito numero di piani, li quali siano tutti paralleli alla sezione massima, tutte le sezioni, siccome si è dimostrato, sono simili tra loro, e queste

(a) *Teor.* 2. *Cap.* 12.

sta sono tra di loro, come le sezioni corrispondenti nel semipoliedro ellittico inscritto nel semipoliedro quadriforme. Onde sarà la somma di tutte le infinite sezioni nel semipoliedro quadriforme, alla somma delle corrispondenti sezioni nel semipoliedro ellittico, come la sezione massima AHDGCFBE, alla sezione massima ADCB, del semipoliedro ellittico, e predendosi le une, e le altre sezioni per elementi del semipoliedro quadriforme, ed ellittico, le di loro somme saranno le solidità di essi, e perciò la solidità del semipoliedro quadriforme, sta alla solidità del semipoliedro ellittico, come la sezione massima AHDGCFBE, alla sezione massima ADCB; Ma la solidità del semipoliedro ellittico, si ha moltiplicando la sezione massima ADCB, per li due terzi dell' altezza IK (*a*); Dunque il semipoliedro quadriforme si averà moltiplicando la sezione massima AHDGCFBE, per li due terzi dell' altezza IK.

TEO-

(a) *Teor.* 9. *Cap.* 3.

TEOREMA VI.

Li perimetri di due archi simili, di Ellissi simili, sono nella ragione delle loro suttese.

(Tav. IV. Fig. 37)

Siano simili li due archi EBF, ebf, delle due Ellissi simili ABCD, abcd, ed abbiano le loro suttese parallele all'assi maggiori. Dico, che il perimetro dell'arco EBF, stia al perimetro dell'arco ebf, come EF, ef,

Si concepiscano li due semiassi OB, ob, diviso in un numero eguale di parti quanto più picciole si possono, e per li punti delle divisioni s'intendono tirate altrettante rette parallele alli assi maggiori, queste divideranno le semiellissi ABC, abc, in uno istesso egual numero di trapezii, prendendosi le parti de' perimetri delle dette semiellissi intercette alle parallele per lineole rette, suppongasi nella semiellissi ABC, il trapezio ACFE, formato dalle due parallele AG, EF, e dalle due porzioni AE, CF, del perimetro della semiellissi, e l'altro trapezio corrispondente nelle semiellissi abcd, sia acfe, si uniscano li punti B, E; b, e; per mezzo delle rette BE, be, essendo le due Ellissi ABCD, abcd, simili tra loro, sarà

$$AO : ao = OB : ob \ (a);$$

(a) *Avvert.* 1. *Teor.* 4. *Cap.* 1.

Ma OB : ob = OI : oi (*a*)
essendo OI, oi, aliquote simili di OB, ob.
Dunque AO : ao = OI : oi.
Ciò posto AO: LO = EI: GI (*b*)
Così ancora ao : lo = ei : gi ;
Ma AO: LO = ao: lo, essendo le due LO, lo, eguali ad OB, ob.
Dunque EI: GI = ei: gi,
e permutando EI: ei = GI: gi.
Inoltre avendo li due tirangoli GOI, goi gli angoli GIO, gio, eguali come retti, e GO: OI = go : oi, per essere OI, oi aliquote simili di GO, go, saranno li detti triangoli simili tra loro (*c*), perciò
GI: IO = gi: io.
e permutando GI: gi = IO: io;
Ma si è dimostrato che
EI: ei = GI: gi.
Dunque EI: ei = IO: io
Sicchè li due trapezii AEIO, aeio, saranno simili tra loro; onde AE: IO = ae : io
Della stessa maniera si dimostra in tutti gli altri trapezii, che le porzioni de' perimetri intercette tra le parallele, siano proporzionali colle porzioni de' semiassi OB, ob, intercette tra le parallele, e corrispondenti alle pri-

(a) *Prop.* 15. *lib.* 5.
(b) *Corol.* 1. *Teor.* 3. *Cap.* 1.
(c) *Prop.* 7. *lib.* 6.

prime. Essendo dunque li due segmenti EBF, ebi simili, saranno gli angoli EBI, ebi, eguali (*a*), e gli angoli EIB, eib, sono eguali, perchè retti; Onde li due triangoli EBI, ebi, sono simili, e perciò EI : ei = IB: ib; Ma IB, ed ib, sono le somme delle parti delli semiassi OB, ob, intercette tra le parallele, e queste sono, siccome si è dimostrato, proporzionali con le corrispondenti ne' perimetri EB, eb; sarà IB: ib, come la somma delle dette porzioni, che compongono il segmento EB, alla somma delle altre porzioni, che compongono il segmento eb. Dunque la porzione di perimetro EB, sta alla porzione di perimetro eb, come EI: ei; Ma gli loro dupli anche sono proporzionali. Sicchè dunque il perimetro del segmento EBF, sta al perimetro del segmento ebf, come EF: ef. Ciocchè doveasi dimostrare.

AVVERTIMENTO I.

(Tav. IV. fig. 35)

Da ciò si è dimostrato si deduce, che la superficie di un semipoliedro quadriforme sia eguale al prodotto del perimetro della sezione massima per la sua altezza. Poichè se si concepisce diviso il semipoliedro quadriforme ABCD, in un numero infinito di piani tutti paralleli alla sezione massima, siccome è il piano acde, si avrà, che la somma de' peri-

(a) *Def.* 6 *Cap.* 12.

metri de' quattro segmenti AHD , DGD , CFB , BEA, stia alla somma delle quattro suttese AD , DC, CB , BA, come la somma de' perimetri de' quattro segmenti ac,cd, de, ea, alla somma delle quattro suttese corrispondenti (*a*), essendo gli archi sudetti simili tra loro (*b*) , e questo avendo luogo e tutte le sezioni , che si fanno nel detto semipoliedro, e prendendosi queste sezioni per elementi della superficie del semipoliedro quadriforme, e del semipoliedro ellittico, si avrà, che la somma delle infinite sezioni fatte nel semipoliedro quadriforme AHDGCFBEK , o sia la sua superficie , stia alla somma delle infinite sezioni corrispondenti nel semipoliedro ellittico ADCBK , o sia la sua superficie, come il perimetro della sezione massima AHDGCFBE , del semipoliedro quadriforme , al perimetro della sezione massima ADCB , del semipoliedro ellittico ; Ma la superficie del semipoliedro ellittico,si ha moltiplicando il perimetro della sezione massima per l'altezza IK (*c*) ; Dunque la superficie del semipoliedro quadriforme si avrà ancora moltiplicando il perimetro della sezione massima di esso , per l'altezza IK.

AV-

(a) *Teor precedente.*
(b) *Teor.* 5. *Cap.* 11.
(c) *Avvert. Teor.* 7. *Cap.* 3.

AVVERTIMENTO II.

(Tav. IV. Fig. 39)

Puole nascere un semipoliedro quadriforme dall'intersezione di due semisferoidi, ovvero di un semisferoide, e di un semiellittoide, e da due semiellittoidi, quali solidi debbono avere un asse di commune, il quale formarà l'altezza del semipolliedro; e la solidità di ciascuno de' detti semipoliedri si avrà, moltiplicando la sezione massima, per li due terzi della sua altezza. E così ancora il prodotto del perimetro della sezione massima di un semipoliedro della specie detta di sopra, per la sua altezza, sarà la superficie di esso: una tal verità è chiara, poicchè adattando la simile dimostrazione, si verrà in cognizione di essa; Ma per adattare una tal dimostrazione alli due solidi detti di sopra è necessario far vedere ancora, che la sezione obbliqua di uno Ellittoide, sia Ellissi. Sia EMND, una sezione obbliqua di un semiellittoide, sarà la detta sezione una semiellissi. Si faccino passare li due piani eMG, bNF, li quali siano paralleli tra loro, e perpendicolari al piano AbCF, questi per la generazione dello Ellittoide saranno semiellissi (*a*); siano li detti piani paralleli al piano, che passa per l'altri due assi dello Ellittoide. Dal punto H, si ab-

(2) *Def. Teor.* 7. *Cap* 6.

si abbassi la retta aH, perpendicolare a bF; e per lo punto a, si tiri la retta ad, parallela ad IN, essendo le due semiellissi bNF, eMG, simili tra loro, le ordinate ad, HM, divideranno le dette semiellissi in semisegmenti simili, e perciò

ad: HM = ab: He

Così ancora ad: HM = aF: HG

Onde $ad^2 : HM^2 = ab \dagger aF : He \dagger HG$ e permutando il quadrato di ad, sta al rettangolo di ba, in aF, come il quadrato di HM, al rettangolo di eH, in HG; Ma il quadrato di ad, sta al rettangolo di ba, in aF, come IN^2 : rett. blF: Dunque HM^2 : rett. eHG = IN^2 : rett. blF, e permutando $HM^2 : IN^2$ = rett. eHG : ret. blF; Ma rett. eHG : ret. blF = rett. EHD : rett. EID (*a*); Dunque il rettangolo DIE, sta al rettangolo DHE, come $IN^2 : HM^2$, ma questa è proprietà della Ellissi; Dunque la sezione EMND, obbliqua ad uno Ellittoide, sarà una Ellissi.

CAP.

(a) *Teor.* 3. *Cap.* 12.

CAP. XIII.

Della solidità delle varie specie di Volta a crociera col reguglio.

DEFINIZIONE.

(Tav. IV. fig. 41)

S'intersecano li due semisferoidi LaM,NaP, li quali abbiano gli assi conjugati eguali, e si uniscono li punti A, B, C, D, per mezzo delle rette AB, BC, CD, DA, e da queste rette s'intendono innalzati quattro piani perpendicolari al piano soggetto ABCD; questi tagliaranno li quattro semisegmenti, AFBN, BHCM, CQDP, DIAL; Il solido rimanente AFBHCQDIa, sarà l' anima della Volta a crociera col reguglio. Dalla generazione di detta Volta, si ricava, che a quattro specie si riduce la formazione di esse.

I. Quando vien formata sopra una pianta quadrata, e gli archi, che la sostengono siano semicircolari, ed una tale Volta nasce dall'intersezione di due semisferoidi eguali, per lungo divisi, ed abbiano gli assi conjugati eguali, siccome vedesi in pianta figura 43. n. I.

II. Quando vien fatta sopra una pianta rettangolare, e gli archi, che la sostengono, due siano semicircolari, e due altri semiellittici, ed una simile Volta nasce dall'inte-

sezione di uno semisferoide, e di un semiellittoide per lungo divisi, li quali abbiano un semiasse di commune, e devono essere di tal condizione, che gli archi innalzati sopra li lati del rettangolo, li quali sono sezioni nel semisferoide, e nel semiellittoide, siano eguali: Siccome osservasi in pianta fig. 43. n. 2.

III. Quando è costrutta sopra una pianta quadrata, e gli archi che la sostengano siano semiellissi, nasce la detta Volta dalla intersezione di due semiellittoidi eguali, li quali abbiano gli assi eguali: siccome vedesi in pianta fig. 43. n. 3.

IV. Finalmente quando copre una pianta rettangolare, e gli archi, che la sostengono siano semiellissi, e questa nasce dall' intersezione di due semiellittoidi ineguali, li quali abbiano un commune semiasse, e devono essere di tal natura, che le sezioni fatte da' piani che passano per li lati del rettangolo, le quali sono semiellissi, devono avere altezze eguali, siccome osservasi in pianta fig. 43. n. 4.

TEOREMA I.

(Tav. IV. fig. 40.)

Sia divisa la sfera CADB, nelli due segmenti ACB, ADB, dal piano AB, al quale gli sia perpendicolare il diametro: e si facci come FD, altezza del segmento ADB, al raggio OD, così l'altezza CE, del segmento ACB, al quarto proporzionale FC. Dico, che il cono AFB, che ha per altez-

za FE, sia eguale al segmento sferico ACB.

Si sechi la sfera, ed il cono per un piano che passa per il diametro CD. Nella sfera la sezione sarà il circolo massimo ACBD, e nelli coni AFB, ACB, il due triangoli AFB, ACB. Ed essendo CD perpendicolare al piano AB, sarà l'angolo CEA, retto *(a)*, e perciò eguali all' angolo CAD *(b)*. Sicchè

CA : AE = CD : DA *(c)*

Ma CD : DA = DA : DA

Sarà CD : DE = CD^2 : DE^2 *(d)*

oppure = CA^2 : AE^2

Inoltre CE : ED = FC : CO,

Componendo sarà CD : DE = FO : CO *(e)*

Onde sarà FO : CO = CA^2 : AE^2 ovvero come il cerchio, il di cui raggio è CA, al cerchio AB *(f)*; Sicchè il cono, che ha per base il cerchio AB, e per altezza FO, sarà eguale al cono, che ha per base il cerchio descritto col raggio AC, e per altezza CO *(g)*; Ma questo cono è eguale al settore sferico ACBO; *(h)*; Dunque il cono, che ha

---

(a) *Def. 3. lib.* 11.
(b) *Prop.* 31. *lib.* 3.
(c) *Prop.* 4 *lib.* 6.
(d) *Def.* 7. *lib.* 6.
(e) *Prop.* 18. *lib.* 5.
(f) *Prop.* 2. *lib.* 12.
(g) *Prop.* 15. *lib.* 12.
(h) *Corol. prop.* 57 *de sphæ., et Cyl. Caravelli.*

ha per base il cerchio AB, e per altezza FO, sarà eguale al settore sferico ACBO aggiuntovi di commune il cono AOB, sarà il cono ABF, eguale al segmento sferico ACB. Ciocchè bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

Essendo ED : OD = CE : FC, componendo sarà ED + OD : ED = EC + FC : CE ; Ma CE + FC, o sia FE, sta a CE, come il cono AFB, al cono ABC (*a*) ; ed il cono AFB, si è dimostrato eguale al segmento sferico ACB. Sicchè dunque il segmento sferico ACB, sta al cono massimo inscritto in esso, come la somma di Ei.' altezza dell'altro segmento, e raggio OD, alla stessa ED.

TEOREMA II.

(Tav. II. Fig. 26.)

Nello sferoide aKbL, il segmento gKG, sta al cono massimo gKG, inscritto in esso, come la somma di cL, altezza dell'altro segmento, e del semiasse OL, alla stessa cL.

Si concepisca descritta una sfera col raggio OL, semiasse di detto sferoide, sarà il segmento sferico yKD, al segmento sferoidico gKG, come $KL^2 : ab^2$ (*b*), ovvero come $yD_2 : gG^2$ (*c*) ; ma $yD^2 : gG^2$, come il cer-

(a) *Prop.* 13. *lib.* 12.
(b) *Corol.* 1 *Teor.* 5. *cap.* 6.
(c) *Corol.* 1 *Teor.* 3 *cap.* 1.

chio il di cui diametro è yD, al cerchio descritto col diametro gG (*a*), ed il cerchio descritto col diametro yD, sta al cerchio descritto col diametro gG, come il cono yKD, al cono gKG (*b*); Dunque il segmento sferico yKD, sta al segmento sferoidico gKG, come il cono yKD, al cono gKG, e permutando, il segmento sferico yKD, sta al cono yKD, come il segmento sferoidico gKG; al cono gKG ma il segmento sferico yKD, sta al cono yKD, inscritto in esso, come Lc†OL: Lc (*c*); Dunque ancora il segmento sferoidico gKG, sta al cono gKG, inscritto in esso, come Lc†LO, somma dell' altezza dell' altro segmento, e semiasse, ad Lc, altezza dell'altro segmento. Ciocchè bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

Una tal verità ha luogo non solo nel segmento sferoideo tagliato da un piano parallelo all'asse minore, siccome si è dimostrato, ma ancora in qualunque segmento del detto sferoide, ed in qualunque segmento di Ellittoide. Sia il segmento EBF, di un Ellittoide, il quale abbia l'asse minore BD, l' asse medio AC, e l'asse maggiore suppongasi innalzato dal centro O, il quale sia perpendicolare alla Ellissi ABCD, e sia GRH, il cor-

(a) *Prop.* 2. *lib.* 12.
(b) *Prop.* 11. *lib.* 12.
(c) *Corol. Teor. precedente.*

rispondente segmento sferico; sarà il segmento EBF; al segmento GBH, come AC, moltiplicato per l'asse maggiore, al quadrato di BD (*a*), ovvero come il rettangolo di EF, nell' asse maggiore della Ellissi, che passa per EF, la quale sarà base del detto segmento Ellittoidico, al quadrato di GH (*b*); ma il detto rettangolo, sta al detto quadrato di GH, come la Ellissi, la quale passa per EF, o sia la base del segmento EBF, dello Ellittoide, al cerchio, che ha per diametro GH (*c*); Dunque il segmento EBF, sta al segmento GBH, come la base del segmento primo, alla base del segmento secondo, ovvero come il cono EBF, al cono GBH (*d*): e permutando, il segmento EBF, sta al cono EBF, come il segmento sferico GBH, al cono GBH; ma il segmento GBH, sta al cono GBH, come ID†OD: ID; Sicchè dunque il segmento EBF, dello Ellittoide, sta al cono Ellittico EBF, come ID†OD: ID, della stessa maniera si dimostra del segmento di uno sferoide diviso per un piano, la di cui sezione sarà Ellissi, poichè questo segmento, la base del quale, è Ellissi, sta al segmento sferico corrispondente, come il rettangolo circon-

(a) *Corol.* 1. *Teor.* 7. *Cap.* 6.
(b) *Corol.* 1. *Teor.* 3. *Cap.* 1.
(c) *Corol.* 1. *Teor.* 4. *Cap.* 1.
(d) *Prop.* 11. *lib.* 12.

conscritto alla base del detto segmento, al quadrato circonscritto alla base del segmento sferico *(a)* ; ovvero come l' altezza dell' altro segmento, più il semiasse, alla stessa altezza del detto segmento. Sicchè dunque qualunque segmento, o di sferoide, o di Ellittoide, sta al cono massimo inscritto nel detto segmento, come la somma dell' altezza dell' altro segmento, ed il semiasse, alla stessa altezza dell' altro segmento.

AVVERTIMENTO II.

Si noti, che di qualunque segmento di ellissi, si averà il suo valore presso a poco, prendendo li due terzi del rettangolo fatto dalla base, e dall' altezza di esso segmento.

PROBLEMA

Trovare una formola generale per avere il valore della solidità di qualunque Volta a crociera col reguglio.

(Tav. IV. Fig. 41).

Sia il solido AFBHCQDIa, l'anima di una Volta a crociera di quarta specie, cioè che sia generata dall' intersezione di due semiellittoidi disuguali, li quali abbiano il semiasse aO, di comune, e perciò la figura ABCD, sarà rettangolo, e li quattro archi AFB,

T

(a) *Corol.* 3. *Teor.* 5. *Cap.* 6.

AFB , BHC , CQD , DIA , che sostengono la detta Volta saranno semielissi. Sia pertanto AB $= a$, BC $= d$, EF $=$ HG $= e$; sarà BG $=$ Fb $= \frac{d}{2}$; e BE $=$ Hb $= \frac{a}{2}$; ab $= b$, sarà aO $= e + b$; e $\frac{2}{3}$ aO $= \frac{2e+2b}{3}$; e l' asse comune essendo 2aO , sarà $2e+2b$; e 'l medesimo asse meno b, sarà $2e+b$, il quale moltiplicandolo per b, si averà $2eb+b^2$, che sarà il rettangolo fatto dall'ascissa ab, nella restante porzione del medesimo asse;e sia $\sqrt{2eb+b^2} = c$. Indi si facci , come

$c : \frac{d}{2} = e+b$, al quarto proporzionale,

che sarà $\frac{de+db}{2c}$ = NO = PO (*a*)

così ancora si facci , come

$c : \frac{a}{2} = e+b$, al quarto proporzionale,

che sarà $\frac{ae+ab}{2c}$ = MO = LO

sarà NE = $\frac{de+db}{2c} - \frac{d}{2}$; ed MG = $\frac{ae+ab}{2c} - \frac{a}{2}$;

(a) *Prob.* 2. *Cap.* 1.

$-\frac{a}{2}$; Ed il segmento ANB $= \frac{2}{3}\ a\ (\frac{de+db}{2c} - \frac{d}{2}) = \frac{ade+adb}{3c} - \frac{ad}{3}$ (a),

e saranno gli due segmenti ANB+CPD $= \frac{2ade+2adb}{3c} - \frac{2ad.}{3}$

Inoltre il segmento BMC $= \frac{2}{3}\ d\ (\frac{ae+ab}{2c} - \frac{a}{2}) = \frac{ade+adb}{3c} - \frac{ad}{3}$,

e saranno gli due segmenti BMC+ALD $= \frac{2ade+2adb}{3c} - \frac{2ad:}{3}$

Onde ANB + CPD + BMC + ALD $= \frac{4ade+4adb}{3c} - \frac{4ad}{3}$ aggiuntovi il rettangolo ABCD $= ad$, la somma $\frac{4ade+4adb}{3c} - \frac{ad}{3}$, sarà la base del semipoliedro quadriforme, la quale moltiplicandola per $\frac{2}{3}$ aO , si averà la sua solidità $= \frac{8ade^2+16adbe+8adb^2}{9c} - \frac{2ade-2adb}{9}$ (b) = A.

(a) *Avvert.* 2. *Teor.* 2. *Cap.* 13.
(b) *Avvert.* 2. *Teor.* 6. 12.

Ciò posto, il cono ANB $= \frac{11}{14} 2ae \times \frac{1}{3}$, $\left(\frac{de}{2c} + db - \frac{d}{2}\right) = \frac{11ade^2}{42c} + 11adbe - \frac{11ade}{42}$

$EP = 2NO - NE = \frac{de}{2c} + db + \frac{d}{2}$;

ed $EP + OP = \frac{de}{c} + db + \frac{d}{2}$

Sicchè facendo, come

$\frac{de}{2c} + db + \frac{d}{2} : \frac{de}{c} + db + \frac{d}{2} = 11ade^2 + 11adbe - \frac{11ade}{42}$ al quarto proporzionale, che sarà $\frac{22ade^3 + 44adbe^2 + 22adb^2e + 11ade^2c}{42ce + 42cb + 42c^2} + 11adbec - \frac{22ade^2 - 22adeb - 11adec}{42e + 42b + 42c} =$

B, questo sarà il corrispondente segmento(*a*), ovvero li due semisegmenti AFBN, CQDP. Inoltre il cono $BMC = \frac{11}{14} 2de \times \frac{1}{3} \left(\frac{ae}{2c} + ab - \frac{a}{2}\right) = \frac{11ade^2}{42c} + 11adeb - \frac{11ade}{42}$.

ed $LG = 2MO - MG = \frac{ae}{2c} + ab + \frac{a}{2}$,

(a) *Avvert.* 1. *Teor.* 2 *cap.* 13.

ed LG † LO = $\frac{ae}{c} \dagger \frac{ab}{c} \dagger \frac{a}{2}$.

E facendo, come

$\frac{ae}{2c} \dagger \frac{ab}{2c} \dagger \frac{a}{2} : \frac{ae}{c} \dagger \frac{ab}{c} \dagger \frac{a}{2} = \frac{11ade^2}{42c} \dagger \frac{11adeb}{42c} - \frac{11ade}{42}$, al quarto proporzionale, che sarà

$\frac{22ade^3}{42ce} \dagger \frac{44adbe^2}{42ce} \dagger \frac{22adb^2e}{42cb} \dagger \frac{11ade^2c}{42c^2} \dagger \frac{11adbec}{42c^2} - \frac{22ade^2}{42c} - \frac{22adeb}{42b} - \frac{11adec}{42c} = C$, questo sarà il segmento corrispondente, ovvero li due semisegmenti BHCM, AIDL.

Sicchè saranno li quattro semisegmenti AFBN † CQDP † BHCM † AIDL = B † C = $\frac{22ade^3}{21ce} \dagger \frac{44adbe^2}{21cb} \dagger \frac{22adb^2e}{21c^2} \dagger \frac{11ade^2c}{21c^2} \dagger \frac{11adbec}{21e} - \frac{22ade^2}{21e} - \frac{22adeb}{21b} \dagger \frac{11adec}{21c} - E$.

Onde l'anima della Volta a crociera col reguglio di quarta specie, sarà A — E = $\frac{8ade^2}{9c} \dagger \frac{16adbe}{9c} \dagger \frac{8adb^2}{9c} \dagger \frac{22ade^2}{21e} \dagger \frac{22adeb}{21b} \dagger \frac{11adec}{21c} - \frac{22ade^3}{21ce} - \frac{44adbe^2}{21ce} - \frac{22adb^2e}{21cb} - \frac{11ade^2c}{21c^2} - \frac{11adbec}{21c^2}$

$$-\frac{2ade-2adb}{9}=\frac{8ad}{9c}(e^2+2be+b^2)+\frac{11ad}{21(e+b+c)}(2e^2+2cb+ec)-\frac{11ad}{21c(e+b+c)}(2e^3+4e^2b+2b^2e)+e^2c+bec)-\frac{2ad}{9}(e+b)=\frac{8ad}{9c}(e+b)^2+\frac{11ad}{21(e+b+c)}(2e+2b+c)e-\frac{11ad}{21c(e+b+c)}(e+b)(2e+2b+c)e-\frac{2ad}{9}(e+b).$$

Ciocchè doveasi cercare.

AVVERTIMENTO I.

Per avere il valore della solidità di qualunque Volta a crociera col reguglio di qualsivoglia specie, essendo cognita la lunghezza, la larghezza, il sesto, il reguglio, e la grossezza alla cima, devesi.

I. Dalla somma del duplo rettangolo fatto dal sesto, e dal reguglio, più il quadrato del reguglio, estraerne la radice quadrata, che sarà il valore di c, e si noti.

II. Dopo nove volte la detta radice, otto volte il prodotto della lunghezza, e larghezza, ed il quadrato fatto dalla somma del sesto, e reguglio, si trovi un quarto proporzionale, e si noti.

III. Dopo ventuno volte la somma della det-

detta radice, sesto, e reguglio, undeci volte il prodotto della lunghezza, e larghezza, ed il prodotto della somma del duplo sesto, duplo reguglio, e la detta radice, moltiplicata per il sesto, si trovi un altro quarto proporzionale, e si noti.

IV. Si moltiplichi la somma del sesto, e del reguglio, per la somma del duplo sesto, il duplo reguglio, e la detta radice, ed il prodotto si moltiplichi per il sesto, ed il prodotto si noti.

V. Dopo il prodotto di ventuno volte la detta radice, per la somma del sesto, reguglio, e detta radice, undici volte il rettangolo fatto dalla lunghezza, e larghezza, ed il prodotto notato nel n: IV, si trovi un'altro quarto proporzionale, e si noti.

VI. Dopo il numero costante 9, il duplo rettangolo fatto dalla lunghezza, e larghezza e la somma del sesto, e reguglio si trovi un'altro quarto proporzionale, e si noti.

VII. Dalla somma de due primi quarti proporzionali, se ne tolga la somma degli altri due, ed il residuo sarà l'anima di detta Volta.

VIII. Finalmente dal prodotto della lunghezza, per la larghezza, per la somma del sesto, reguglio, e grossezza alla cima se ne tolga la detta anima, il residuo sarà la solidità di detta Volta a Crociera col reguglio.

Sia, per esempio, $a=20$, $d=30$, $e=8$,

$b=1$, e sia grossa alla cima 1. La radice quadrata detta nel n: I sarà 4. 12. Dopo li tre numeri 37. 08, 4800, 81, detti nel n: II. si trovi il quarto proporzionale 10485. 43, e si noti. Dopo li tre numeri 275. 52, 6600 , 176. 96 , detti nel n: III. si trovi il quarto proporzionale 4239. 02, e si noti. Il prodotto detto nel n: IV. sarà 1592. 64. Dopo li tre numeri 1135. 14, 6600, 1592. 64, detti nel n: V. si trovi il quarto proporzionale 9260. 02, e si noti. Dopo li tre numeri 9, 1200, 9, detti nel n: VI. si trovi il quarto proporzionale 1200. Dalla somma de due primi quarti proporzionali, se ne tolga la somma degli altri due, il residuo 4264. 43, sarà l'anima di detta Volta. Dal prodotto della lunghezza , per la larghezza, per la somma del sesto, reguglio , e grossezza alla cima , ch'è 6000, se ne tolga la detta anima , il residuo 1735. 57 , sarà la Solidità di detta Volta a Crociera col reguglio.

AVVERTIMEMTO.

(Tav. IV. fig. 41.)

Si noti , che dalla descritta formola si rileva che li quattro segmenti ellittici ANB, BMC, CPD , DLA , formati sopra li lati di detta Volta, sono eguali; ed eguali ancora sono gli semisegmenti sferoidici, ed ellittoidici, le basi de'quali sono gli detti segmenti ellittici. E ciò accade ancora intersecandosi due semisferoidi;

un

un semisferoide, ed un semiellittoide; e due semiellettoidi, di quella condizione detta nella definizione del presente capitolo.

AVVERTIMENTO III.

Quantunque la formola trovata, la quale ci porta al conoscimento del valore della solidità delle varie specie di Volte a Crociera col reguglio, sia una approssimazione, per essersi presa l'aria del segmento di una ellissi li due terzi del rettangolo fatto dalla corda, e saetta di detto segmento; pur tutta via si potrebbe indagare il vero valore della detta solidità, con intrigarci nella detta formola il calcolo trigonometrico, supponendo divisa la Volta nelle sue quattro lunette, e ritrovando una porzione di sfera, la quale abbia per diametro l'esse commune, e sia corrispondente alla detta lunetta (e per ritrovar ciò vi bisogna il detto calcolo trigonometrico) indi trovando un quarto proporzionale dopo il quadrato dell'asse minore, il quadrato dell'asse maggiore, e le solidità delle quattro porzioni sferiche corrispondenti alle dette quattro lunette, questo sarebbe la solidità di detta Volta, essendo generata da interesezioni di semisferoidi, ma se poi vien generata da intersezioni di semisferoide, e di semiellittoide, in tal caso la solidità della lunetta sferoidica, si ha siccome si è detto;

e

e quella dello ellittoide, si ha trovando un quarto proporzionale dopo il quadrato dell'asse minore, il rettangolo fatto dall'asse maggiore, e medio, e la porzion di sfera corrispondente a detta lunetta, questo sarebbe la sua solidità. Ma ciò sarebbe di molto imbarazzo, e vi bisognarebbe moltissimo tempo per venire in cognizione della detta solidità, ed a poco divario si ridurrebbe dalla detta esattezza, alla descritta formola.

AVVERTIMENTO IV.

A favor della brevità, che in simili calcoli devesi adoprare, avendo esaminato la natura di detti solidi, ed avendone fatti varj calcoli di tutte le quattro specie descritte di detta Volta, mi è riuscito trovare, che il parallelepipedo, il quale ha per base la figura, sopra della quale è costrutta la Volta a crociera, e per altezza la somma del sesto, e reguglio, stia alla solidità di detta Volta, come 950 : 199. Sicchè per avere il valore della solidità di qualunque Volta a crociera col reguglio, di qualsivoglia specie sia data, devesi.

I. Moltiplicare la lunghezza, per la larghezza, e per la somma del sesto, e reguglio, ed il prodotto si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 950, 199, ed il detto prodotto, trovisi un quarto proporzionale, e si noti.

III.

III. Finalmente al prodotto della lunghezza, larghezza, e grossezza alla cima, vi si aggiunga il detto quarto proporzionale, la somma sarà il valore della solidità di detta Volta a crociera col reguglio.

AVVERTIMENTO V.

Soglionsi da' Fabri, nel costruire simili Volte a crociera col reguglio per evitare il fastidio nel far le forme con le crociere, farle prima a vela, ed indi ci aggiungono gli spighetti diagonalmente, e le convertiscono a crociere. Queste avendo la natura delle Volte a vela, devonsi della stessa maniera calcolare; come si è detto nel cap. VIII. e la ricacciatura de' detti spighetti se li darà da parte. Perciò si veggono alcune Volte a crociere, che in vece di essere elevate, o piane nel mezzo, sono più basse nel mezzo, di quello che sono nelli vertici degli archi che le sostengono, queste tali Volte sono state costrutte sopra l'anima di volta a vela senza reguglio, ed indi convertite a crociera con aggiungerci li spighetti, questi facendo grossezza nel mezzo vengono a ribassarsi; tali sorte di volte devonsi calcolare come fussero a vela senza reguglio.

CAP. XIV.

Della superficie delle varie, specie di Volte a crociera col reguglio.

TEOREMA I.

Se due segmenti in un medesimo cerchio sono eguali, le superficie sferiche corrispondenti a detti segmenti saranno eguali tra loro.

(Tav. V. fig. 42.)

Siano li due segmenti AFB, BEC, nel medesimo cerchio, eguali tra loro. Dico, che formandosi dal cerchio ACI, la sfera, le superficie corrispondenti a detti segmenti siano eguali tra loro.

Essendo li due segmenti AFB, BEC, eguali tra loro, saranno simili ancora, e perciò gli archi AB, BC, saranno eguali, onde anche le rette AB, BC, saranno eguali (a), e le loro mettà BG, BH, saranno anche eguali; ed essendo EO, eguale ad FO, sarà EG, eguale ad FH: Sicchè negli due triangoli BGE, BHF, li due lati dell'uno, sono eguali alli due lati dell'altro, e gli angoli EGB, FHB

(a) *Prop.* 29. *lib.* 3.

FHB, come retti (*a*) sono eguali, saranno le basi BE , BF , anche eguali (*b*). Ciò posto, essendo BE, eguale a BF, sarà il circolo descritto col raggio BE , eguale al circolo descritto col raggio BF ; ma il primo circolo è eguale alla superficie del segmento sferico BEC, ed il secondo è eguale alla superficie del segmento sferico BFA (*c*): dunque la superficie del segmento sferico BEC, sarà eguale alla superficie del segmento sferico BFA, Ciocchè bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

Essendosi dimostrato AB, eguale a BC; ed EG, eguale ad FH, sarà ancora OG, eguale ad OH. Onde li due triangoli AOB, BOC, saranno eguali tra loro , aggiuntovi gli segmenti AFB , BEC , che sono eguali, saranno gli settori AFBO , BECO , eguali ancora. Sicchè dunque da ciò se ne deducono le seguenti illazioni.

I. Se in un cerchio vi sono due segmenti eguali , gli settori saranno eguali.

II. Se due settori in un cerchio , sono eguali, le superficie de triangoli sferici, corrispondenti a' detti settori, generati con archi

(a) *Prop. 3. lib. 3.*
(b) *Prop. 4. lib. 1.*
(c) *Prop. 62. de sphe, et Cyl. Caravelli.*

chi di cerchi massimi, saranno eguali.

III. Finalmente gli triangoli sferici corrispondenti alli triangoli AOB, BOC, saranno ancora eguali.

AVVERTIMENTO.

(Tav. V. Fig. 43. n. 1.)

S'intersechino due semisferoidi lunghi, e le basi di essi siano le due ellissi ABCD, EFGH, ed abbiano li detti semisferoidi, gli assi minori eguali, così ancora gli assi maggiori. La superficie del settore sferoidico, corrispondente al settore ellittico OKCL, sta alla superficie del triangolo sferico corrispondente al settore circolare ObFa, come OC : OF (*a*), ovvero come il settore Ellittico OKGL, al settore circolare ObFa (*b*). Inoltre la superficie del segmento sferoidico, corrispondente alla superficie del segmento Ellittico KCL, sta alla superficie del segmento sferico, corrispondente al segmento circolare bFa, come OC: OF, ovvero come il segmento KCL, al segmento bFa. Della stessa maniera, la superficie del triangolo sferoidico, corrispondente al settore ellittico OLEM, sta alla superficie del triangolo sferico, corrispondente al settore circolare OeDf, come il settore ellittico OLEM, al

(a) *Corol.* 2. *Teor.* 5. *Cap.* 7.
(b) *Corol.* 7. *Teor.* 3 *Cap.* 1.

al settore circolare OeDf, e la superficie del segmento sferoidico, corrispondente al segmento ellittico LEM, sta alla superficie del segmento sferico, corrispondente al segmento circolare e D f, come il segmento ellittico LEM, al segmento circolare eDf; Ma essendo il segmento KCL, eguale al segmento LEM (*a*), saranno gli segmenti circolari bFa, eDf, anche eguali tra loro, ed essendo gli segmenti circolari eguali, saranno gli settori anche eguali (*b*): Onde tanto gli settori circolari ObFa, OeDF, quanto gli settori ellittici OKCL, OLEM, saranno eguali; E pertanto la superficie del triangolo sferoidico, corrispondente al settore Ellittico OKCL, sarà eguale alla superficie del triangolo sferoidico, corrispondente al settore ellittico OLEM, e la superficie del segmento sferoidco, corrispondente al segmento ellittico KCL, sarà eguale alla superficie del segmento sferoidico, cerrispondente al segmento ellittico LEM, per essere quelli sferici corrispondenti eguali (*c*). Sicchè dunque se da' primi se ne tolgono gli secondi, si averà, che la superficie del triangolo sferoidico corrispondente al triangolo LOK, sia eguale alla su-

(a) *Avvert. 2. probl. cap.* 13.
(b) *Corol. Teor. precedente.*
(c) *Teor. precedente.*

superficie del triangolo sferoidico, corrispondente al triangolo LOM.

COROLLARIO.

Essendosi dimostrato, che la superficie del triangolo sferoidico, corrispondente al settore ellittico OKCL, stia al triangolo sferico, corrispondente al settore circolare ObFa, come OC: OF, ovvero come la superficie del segmento sferoidico, corrispondente al segmento ellittico KCL, alla superficie del segmento sferico, corrispondente al segmento circolare bFa, e permutando la superficie del triangolo sferoidico, sta alla superficie del segmento, come la superficie del triangolo sferico, alla superficie del segmento; e devidendo la superficie del triangolo sferoidico, corrispondente al triangolo KOL, sta alla superficie del segmento sferoidico, come la superficie del triangolo sferico corrispondente al triangolo bOa, alla superficie del segmento sferico, e permutando la superficie del detto triangolo sferoidico, sta alla superficie del detto triangolo sferico, come la superficie del segmento sferoidico, alla superficie del segmento sferico, ovvero come OC : OF, (*a*), o come cK : cb, oppure come il triangolo KOL, al tri-

an-

(a) *Corol.* 2 *Teor.* 5. *Cap.* 7.

angolo bOa (a). Sicchè dunque la superficie del triangolo sferoidico . corrispondente al triangolo KOL, sta alla supeficie del triangolo sferico corrispondente al triangolo bOa, come il triangolo KOL, al triangolo bOa.

AVVERTIMENTO II.

S' intersechi il semisferoide, il quale abbia per base la Ellissi ABCD, col semiellittoide, la base del quale sia la Ellissi EFGH, ed abbia tanto il detto semisferoide, quanto il semiellittoide un commune asse minore, e le sezioni nate da piani, che passano per le rette KL, LM, MI, IK, abbiano eguali altezze. S' intende descritto il cerchio DmB, col raggio OD, il quale sarà eguale al semiasse minore, ch' è commune allo semisferoide, ed allo semiellittoide, essendo la ellissi ABCD, base dello semisferoide. Si uniscano li punti b. ed a; f, ed e, per mezzo delle rette ba, fe; e dal centro O, alli punti, b, K, e, L, M, f, si tirino le rette, Ob, OK, e etc. La superficie del triangolo sferoidico corrispondente al settore ellittico OKCL, sta alla superficie del triangolo sferico, corrispondente al settore circolare Obqa, come OC: Oq (b), ovvero come il settore ellittico

Tav. V. fig. 43. n. 2.

(a) *Schol.* 1. *prop.* 1. *lib.* 6.
(b) *Corol.* 2. *Teor.* 3. *Cap.* 7.

littico OKCL, al settore circolare Obqa (a); e per la stessa ragione la superficie del segmento sferoidico, corrispondente al segmento ellittico KCL, sta alla superficie del segmento sferico, corrispondente al segmento circolare bqa, come il segmento ellittico CL al segmento circolare bqa. E la superficie dello semisferoide, sta alla superficie del segmento sferoidico, corrispondente al segmento ellittico LCK, come la superficie emisferica del cerchio, che ha per diametro BD, alla superficie del segmento sferico, corrispondente al segmento circolare bqa. Inoltre la superficie dello semiellittoide LFGH, sta alla superficie dell' emisfero, che ha per diametro BD, come la superficie del segmento ellittoidico, corrispondente al segmento ellittico LEM, alla superficie del segmento sferico, corrispondente al segmento circolare hDg (b). Ma li segmenti ellittici LCK, LEM, sono eguali (c), e saranno ancora eguali li segmenti circolari corrispondenti bqa, hDg, ed essendo le superficie de' segmenti sferici, corrispondenti a detti segmenti circolari, eguali (d). Dunque la superficie del segmento sferoidico, corrispondente al segmento ellittico

(a) *Coral* 7, *Teor.* 3. *Cap.* I.
(b) *Coral.* 3 *Teor.* 10. *Cap.* 7.
(c) *Accurt.* 2 *probl. Cap.* 13.
(d) *Teor.* 2 *Cap.* 14.

LCK, sarà eguale alla superficie del segmento Ellittoidico, corrispondente al segmento ellittico LEM. Per la stessa ragione la superficie del triangolo sferoidico corrispondente al settore ellittico OLCK, sarà eguale alla superficie del triangolo ellittoidico, corrispondente al settore ellittico OLEM, e se da questi ne togliamo le superficie de' detti segmenti, resterà la superficie del triangolo sferoidico, corrispondente al triangolo KOL, eguale alla superficie del triangolo ellittoidico, corrispondente al triangolo LOM.

COROLLARIO.

Essendo il triangolo KLO, eguale al triangolo OLM (*a*), ed il triangolo Oba, eguale al triangolo Obg (b), ed essendo la superficie del triangolo sferoidico, corrispondente al triangolo KOL, eguale alla superficie del triangolo ellittoidico, corrispondente al triangolo LOM, e la superficie del triangolo sferico, corrispondente al triangolo bOa, eguale alla superficie del triangolo sferico, corrispondente al triangolo bOg. E stando la superficie del triangolo sferoidico, corrispondente al triangolo KOL, alla superficie del triangolo sferico corrispondente al triangolo bOa,

(a) *Prop.* 37. *lib.* 1.
(b) *Corol. Teor.* 1. *Cap.* 14.

come il triangolo KOL, al triangolo hOa (*a*); starà ancora la superficie del triangolo ellittoidico, corrispondente al triangolo MOL, alla superficie del triangolo sferico, corrispondente al triangolo hOg, come il triangolo MOL, al triangolo gOh.

AVVERTIMENTO III.

Tav. V. fig. 43. n. 3. S'intersechino due semiellittoidi eguali, li quali abbiano le basi ABCD, EFGH, perfettamente eguali, ed abbiano il semiasse minore eguale, si descriva il cerchio mnp, col raggio Op, eguale al detto semiasse. E dal centro O, alli punti K, L, M, I, si tirino le rette OK, OL, OM, OI. Indi si facci centro O, e coll'intervallo OF, si descriva il cerchio FBHD, il quale colla sua periferia passerà per li punti B, H, D, per essere le basi de' detti semiellittoidi perfettamente eguali, e s'intersecarà colle rette IK, KL, LM, MI, nelli punti b, e, a, i; si tirino le rette Ob, Oe, Oa, Oi, le quali incontreranno la periferia del cerchio ne' punti d, h, f, g, e si uniscano gli detti punti per mezzo delle rette df, gh; il segmento circolare dnf, sarà corrispondente al segmento ellittico KCL, ed il segmento gmh, sarà corrispondente al segmento LEM. Essendo il segmento Ellittico

(a) *Corol. Avvert.* 1. *Cap.* 14.

co KGL, eguale al segmento Ellittico LEM (a), sarà il segmento circolare dnf, eguale al segmento circolare hmg; Onde il triangolo dOf, sarà eguale al triangolo hOg (b); Ma il triangolo KLO, è eguale al triangolo OLM (c); Onde il triangolo KOL, sta al triangolo dOf, come il triangolo LOM, al triangolo hOg. Ma il triangolo KLO, sta al triangolo dOf, come il triangolo Ellittoidico, corrispondente al triangolo KLO, al triangolo sferico, corrispondente al triangolo dOf (d), ed il triangolo LOM, sta al triangolo hOg, come il triangolo ellittoidico, corrispondente al triangolo LOM, al triangolo sferico, corrispondente al triangolo hOg; Dunque il triangolo ellittoidico, corrispondente al triangolo KLO, sta al triangolo sferico, corrispondente al triangolo dOf, come il triangolo Ellittoidico, corrispondente al triangolo LOM, al triangolo sferico, corrispondente al triangolo hOg; Ma il triangolo sferico, corrispondente al triangolo dOf, è eguale al triangolo sferico, corrispondente al triangolo hOg (e); Sicchè dunque ancora il triangolo ellittoidico, corrispondente al triangolo KLO, sarà eguale all' altro triangolo e-

(a) *Anver. 2. probl. Cap.* 13.
(b) *Corol. Teor.* 1. *Cap.* 14.
(c) *Prop.* 3., *lib.* 1.
(d) *Corol. Anver. 2. Teor.* 1. *Cap.* 14.
(e) *Corol. Teor.* 1. *Cap.* 14.

littoidico, corrispondente al triangolo LOM.

AVVERTIMENTO IV.

Tav. V. fig. 43. n. 4. S' intersechino finalmente due semiellittoidi, li quali abbiano gli assi maggiori, e medii disuguali, e gli assi minori siano eguali, ovvero due qualsivogliano assi siano inegnali, ed il terzo sia di commune, e le basi di essi siano l'ellissi ABCD, EFGH, come ancora le sezioni nate, da' piani, che passano per le rette ML, LK, KI, IM, abbiano eguali altezze. Si descriva il cerchio mnp, col raggio Op, eguale al semiasse minore, ch'è commune alli due semiellittoidi. Indi si descrivano due altri cerchi, uno che abbia per diametro l'asse minore BD, della Ellissi ABCD, il quale sarà asse medio del semiellittoide corrispondente a detta Ellissi, e l'altro col diametro FH, asse minore della Ellissi EFGH, il quale sarà asse medio del semiellittoide, corrispondente a detta ellissi, quali due cerchi con le loro periferie incontrano le rette IK, KL, LM, MI, nelli punti c, a, e, i; Si uniscano questi punti per mezzo delle rette ca, ei. Dal centro O, alli punti c, K, e, L, a, M, i, si tirino le rette Oc, OK, Oe, OL etc. e finalmente si uniscano li punti b, ed f; h, g, per mezzo delle rette bf, hg; saranno gli segmenti circolari. buf, hmg, corrispondenti alli segmenti Ellittici KCL, LEM,

LEM, eguali tra loro, per essere quelli ellittici eguali (*a*): e perciò il triangolo bOf, sarà eguale al triangolo hOg (*b*); Ma il triangolo KOL, è eguale al triangolo LOM (*c*); Onde il triangolo KOL, sta al triangolo bOf, come il triangolo LOM, al triangolo hOg; Ma il triangolo KOL, sta al triangolo bOf, come il triangolo ellittoidico, corrispondente al triangolo KOL, al triangolo sferico corrispondente al triangolo bOf (*d*): ed il triangolo LOM, sta al triangolo hOg, come il triangolo ellittoidico, corrispondente al triangolo LOM, al triangolo sferico, corrispondente al triangolo hOg; Dunque il triangolo ellittoidico, corrispondente al triangolo KOL, sta al triangolo sferico, corrispondente al triangolo bOf, come il triangolo ellittoidico corrispondente al triangolo LOM, al triangolo sferico, corrispondente al triangolo hOg; Ma il triangolo sferico, corrispondente al triangolo bOf, è eguale al triangolo sferico corrispondente al triangolo hOg (*e*); Dunque il triangolo ellittoidico, corrispondente al triangolo KOL, sara eguale al triangolo ellittoidico,

(a) *Avvert. 2. probl. Cap.* 13.
(b) *Corol. Teor.* 1. *Cap.* 14.
(c) *Prop.* 37. *lib.* 1.
(d) *Corol. Avvert.* 2. *Teor.* 1. *Cap.* 14.
(e) *Corol. Teor.* 1. *Cap.* 14.

dico, corrispondente al triangolo LOM

COROLLARIO.

Da tutto ciò si è dimostrato nelli quattro Avvertimenti precedenti se ne deduce, che la superficie di qualunque Volta a crociera col reguglio è quatrupla di ciascuno de' quattro triangoli sferoidici, o ellittoidici, da' quali essa è formata.

TEOREMA II.

Tav. V. fig. 44 Sia ABC, uno emisfero la base del quale sia il cerchio ADC; e sia ABD, un triangolo sferico: si unisca il centro E, col punto D, per mezzo della retta ED: Dico, che il triangolo sferico ABD, sia duplo del settore AED.

Si concepisca l' archetto DF, il quale misuri esattamente tanto la periferia del cerchio ADC, quanto l' arco AD, si unisca indi il punto F, col punto E, per mezzo della retta FE, e si facci passare tra li punti B, ed F, il quadrante BF. S' intenda divisa la periferia del cerchio ADC, nelle parti eguali all' arco FD, e dal centro E, alli punti delle divisioni si tirino li raggi, e dal polo B, alli detti punti di divisioni si faccino passare li quadranti. Essendo la periferia del cerchio ADC, divisa in parti eguali ad FD, sarà tut-

tutto il cerchio diviso nello stesso numero di settori eguali ad FED, e la superficie dello emisfero ABC, sarà divisa nello stesso numero di parti eguali al triangoletto sferico FBD; nella medesima forma sarà diviso il settore AED; ed il triangolo sferico ABD; sicchè la superficie dello emisfero ABC, sta al cerchio ADC, come la superficie dal triangolo sferico ABD, al settore AED (*a*); Ma la superficie dello emisfero è dupla del cerchio massimo (*b*); Dunque la superficie del triangolo sferico ABD, sarà dupla del settore ADD. Ciocchè bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

Per avere il valore del settore AED, devesi moltiplicare l'arco AD, per la mettà del raggio AE (*c*); Sicchè dunque per avere il valore della superficie del triangolo sferico ADB, devesi moltiplicare l'arco AD, per il raggio BE.

TEO-

(a) *Def.* 9. *lib.* 5.
(b) *Prop.* 36. *de sphac., et Cyl. Caravelli.*
(c) *Prop.* 5. *de circ. dim. Caravelli.*

TEOREMA III.

In ogni ellissi il semiasse maggiore, sta al semiasse minore, come la saetta di un segmento ellittico, alla saetta del segmento circolare corrispondente.

T. I. fig. 5. Sia AIBP, una ellissi qualsivoglia, ed albP, il cerchio, che ha per diametro l'asse minore lP, e sia GBR, un segmento qualsivoglia intersecato dalla retta GR, perpendicolare all'asse maggiore AB, per lo punto G, si tiri la retta Ge, parallela all'asse maggiore AB, che incontra la linea circolare albP, nel punto F, per lo punto F, si tiri la retta Fu, parallela a GR, il segmento Fbu, sarà corrispondente al segmento ellittico GBR. Dico, che il semiasse maggiore IIB, stia al semiasse minore Hb, come la saetta CB, alla saetta Eb.

Per la natura della Ellissi

$$HB : Hb = eG : eF \quad (a)$$

ed essendo eG = HG; ed eF = HE

si averà, che HB : Hb = HC : HE;

ma permutando HB : HC = Hb : HE;

onde convertendo HB : BC = Hb : bE

e permutando HB : Hb = BC : bE;

Sicchè dunque il semiasse maggiore, sta al semias-

(a) *Corol.* 1. *Teor.* 4, *Cap.* 1.

iasse minore, come la saetta del segmento llittico, alla saetta del segmento circola- e, corrispondente, nel cerchio, che ha per iametro l'asse minore. Ciocchè si dovea di- ostrare.

COROLLARIO.

Essendosi dimostrato, che HB: Hb=BC : bE
ermutando HB : BC = Hb : bE ;
convertendo HB : HC = Hb : HE.
icchè dunque il semiasse maggiore di una llissi, sta allo stesso semiasse, meno la saetta i un segmento, come il raggio del cerchio, he ha per diametro l'asse minore, allo stes- raggio, meno la saetta del segmento cir- olare, corrispondente al detto segmento el- ittico.

AVVERTIMENTO I.

Sia ABDI, un cerchio qualunque: e posto Tav. V. fig. 42.
l diametro AD, 1000, sarà la semicircon- erenza 1570. 5, siccome si è detto nell' Av- ertimento IV. Teor. I. Cap. II., ma la som- ma del diametro, e del raggio, presa la pri- ma come suttesa del semicerchio, e la secon- la come saetta, sarà 1500 ; Dunque la semi- circonferenza di un cerchio è maggiore della omma della suttesa; e saetta di detto semi- cerchio. Suppongasi l' arco KBg, di gradi 140.

La

La suttesa Kg, come dupla del seno del semiangolo gOB, sarà 939, la saetta BL., come seno verso dello stesso angolo, sarà 329; onde la somma della suttesa, e saetta dell'arco 140, sarà 1268; Ma l'arco KBg, si è 1221; Dunque la somma della suttesa, e saetta dell'arco 140, è maggiore dell'arco medesimo, e la differenza si è 49, e così andando avanti, si vedrà che quanto più l'arco è minore, la differenza della somma della suttesa; e saetta sarà maggiore dell'arco medesimo. Sicchè la semicirconferenza è maggiore della somma della suttesa, e saetta del semicerchio; la somma della suttesa, e saetta all'incontro degli archi al di sotto de' gradi 140; si fa maggiore degli archi medesimi; Onde vi deve essere un arco, il quale abbia la suttesa, e saetta unita insieme, che gli sia eguale, e questo sarà l'arco di gradi 161, poichè la suttesa di essa è 986, la saetta è 418, la di loro somma sarà 1404; l'arco di gradi 161, si è 1404. Sicchè dunque in qualunque cerchio sempre quando si ha un arco, il quale si accosta al grado 161, si puole prendere per il suo perimetro la somma della suttesa, e saetta di esso arco.

AV-

AVVERTIMENTO II.

S' intersechino le due ellissi ABCD, EFGH, le quali sieno perfettamente eguali; col commune centro O, e col intervallo del semiasse OB, che è eguale ad OH, si descriva il cerchio HBFD, si uniscano indi li punti I, K, L, M, per mezzo delle rette IK, KL, LM, MI, queste incontreranno la circonferenza del cerchio nelli punti b, ed a; li quali si uniscano per mezzo della retta ba, e si unisca ancora il punto e, col punto f, per mezzo della retta ef. Nella ellissi ABCD, si averà, che Tav. V. fig. 43. n. 1.

$$CO : FO = Ld : ad$$

così ancora nella ellissi EFGH, si averà, che

$$EO : DO = Lh : eh$$

Ma essendo l'ellissi perfettamente eguali sarà il semiasse maggiore CO, della prima, eguale al semiasse maggiore EO, della seconda; ed FO, è eguale a DO, per essere raggi del medesimo cerchio, onde Lh, sarà eguale ad Ld, ed essendo l'angolo DOF, retto, sarà la figura LdOh, un quadrato, e quadrato sarà ancora la figura MLKI. Essendo Lh, che è eguale ad ag, eguale ad Ld; ma Ld è maggiore di ad; dunque ag, sarà maggiore di ad, e per conseguenza ab; sarà maggiore di ai, che sono dupli de' primi; Onde essendo bai, semicerchio, sarà l'arco aFb, maggiore de' gradi

90, e si accosterà alli gradi 161, detto nc
l'avvertimento precedente, perciò per il valo
dell'arco aFb, si puole prendere la somm
della suttesa ab, e della saetta gF. Del
stessa maniera si può dimostrare negli alt
tre casi descritti nel n. 2. 3. 4. della fig. 4
nei quali gli archi si accosteranno più al gr
do 161. Sicchè dunque in tutti gli quatt
casi delle intersezioni di semisferoidi, e d
semiellittoidi, per il valore degli archi circo
lari, corrispondenti alli archi ellittici, che so
no tagliati dal quadrato, o dal rettangol
IMLK, si puole prendere la somma dell
suttesa, e della saetta di esso arco:

AVVERTIMENTO III.

T. V. fig. 43. N. 1. Da quelche si è dimostrato nel principi
del precedente avvertimento, si rileva il mo
do di poter inscrivere in qualunque Ellissi u
quadrato. Sia data la Ellissi ABCD, inscri
vere dentro di essa un quadrato. Si tirino g
assi conjugati AB, BD, e col centro O,
coll'intervallo del semiasse minore OB, s
descriva il cerchio BIIDF, si dividon
gli quadranti BF., FD, DII, IIB, i
due parti eguali, e dal centro O, ad u
punto di dette divisioni si tisi una retta,
questa si prolunga fintantocchè giunga ad in
contrare il perimetro della ellissi nel punt
K. indi si faccì centro nel punto O, e col
i

intervallo OK, si descriva un cerchio questo colla sua periferia s' intersecarà col perimetro della ellissi nelli punti K, L, M, I, si uniscono questi punti per mezzo delle rette KL, LM, MI, IK, la figura KLMI, sarà quadrato. Per costruzione l' angolo KOF, è semiretto, e tale ancora è l' angolo LOF, onde l' angolo KOL, è retto; ma OK, è eguale ad OL, per essere raggi dello stesso cerchio; onde gli angoli OKL, OLK, saranno semiretti, della stessa maniera si dimostra, che l' angolo OKI, sia semiretto, e così di tutti gli altri; onde gli angoli MLK, LKI, KIM, IML, saranno retti, e per conseguenza la figura KLMI, sarà rettangola. Nelli due triangoli KOL, LOM si averà, che li due lati del primo, sono eguali alli due lati del secondo, come raggi dello stesso cerchio, l' angolo compreso dalli due lati del primo è eguale all' angolo contenuto dalli due lati del secondo, per essere retti, dunque la base KL, sarè eguale alla base ML (a); così ancora si dimostra, che ML, sia eguale ad MI, e ad IK; onde la figura KLMI, sarà ancora equilatera, e per conseguenza sarà quadrato (b).

PRO-

(a) *Prop. 4. lib. 1.*
(b) *Def. 30. lib. 1.*

PROBLEMA I.

Trovare una formola generale per avere il valore della superficie di una Volta a crociera col reguglio di prima specie.

Sia ML = LK = a; sarà il sesto Md = Lh = $\frac{a}{2}$ il reguglio sia = b; sarà il sesto più il reguglio ch' è DO = $\frac{a}{2} + b$, e l' asse commune essendo 2DO, sarà $a+2b$; e 'l medesimo asse meno b, sarà $a+b$, il quale moltiplicandolo per b, si averà $ab+b^2$, che sarà il rettangolo fatto dall' ascissa, nella restante porzione del medesimo asse, e sia $\sqrt{ab+b^2} = c$, = da = Og = Or. siccome si è detto nel problema Cap. XIII. Indi si facci, come c: $\frac{a}{2} = \frac{a}{2} + b$, al quarto proporzionale che, sarà $\frac{a^2 + 2ab}{4c} = OC = OE$ (a),

Tav. 5. fig. 43. n. 1.

e sarà Ed = Ch = CO — Oh = $\frac{a^2+2ab}{4c} - \frac{a}{2}$; se = ML = a; sarà ancora

(a) *Probl.* 2. *Cap.* 2.

ra OD = $\frac{a+2b}{2}$. Si facci, come OE : OD = Ed, al quarto proporzionale che darà Dr (*a*); che secondo gli caratteri algebraici, la detta proporzione sarà

$\frac{a^2+2ab}{4c} : \frac{a+2b}{2} = \frac{a^2+2ab}{4c} - \frac{a}{2} : \frac{a_2+4ab+4b^2}{2a+4b} - \frac{2ac-4bc}{} = \text{Dr} = \frac{a+2b}{2} - c$

sarà l'arco fDe = $a + \frac{a+2b}{2} - c = \frac{3a+2b}{2} - c$ (*b*)

Onde sarà il triangolo sferico corrispondente al settore Of De $\left(\frac{3a+2b}{2} - c\right)\left(\frac{a+b}{2}\right)$ = $\frac{3a^2+8ab-4b^2}{4} - ac - \frac{2bc}{2}$ (*c*) = A

Inoltre il perimetro del semicerchio, che ha per diametro HF = $\frac{1}{14}$ (HF + 2DO) (*d*), = $\frac{1}{14}$ (2*a*+4*b*) = $\frac{11a+22b}{7}$

La superficie del semisegmento sferico fDe, sarà

(a) *Teor.* 3. *Cap.* 14.
(b) *Avvert.* 2. *Teor.* 3. *Cap.* 14.
(c) *Corol. Teor.* 2. *Cap.* 14.
(d) *Teor.* 1. *Cap.* 2.

sarà $\left(\frac{a+2b}{2}-c\right)\left(\frac{11a+22b}{7}\right)(a)=$

$\frac{11a^2+44ab+44b^2}{14}-\frac{11ac-22bc}{7}=B$

Onde il triangolo sferico, corrispondente al triangolo fOe, sarà $A-B=\frac{3a^2+8ab+4b^2}{4}-$

$\frac{ac-2bc-11a^2}{2}=\frac{44ab-44b^2}{14}+\frac{11ac+22bc}{7}$

$=\frac{15ac+30bc-a^2-32ab-60b^2}{28}$

Essendo Or = c, sarà il triangolo fOe = $\frac{ac}{2}$,

ed il triangolo MOL = $\frac{a^2}{4}$

Ma la superficie del triangolo sferoidico, sta alla superficie del triangolo sferico corrispondente, come il triangolo corrispondente al triangolo sferoidico, al triangolo corrispondente al triangolo sferico (*b*), Dunque facendo, come

$\frac{ac}{2}:\frac{a^2}{4}=\frac{15ac+30bc-a^2-32ab-60b^2}{28}$, a quar-

(a) *Prop. 49. de sphae: & Cyl. Cavalelli*
(b) *Corol. Avvert. 1. Teor. 1. Cap. 14.*

uarto proporzionale $\frac{15a^2 + 30ab}{28} - a^2 -$

$\frac{2a^2b - 60ab^2}{56c} = \frac{15a}{28}(a+2b) - \frac{a}{56c}((a+2b)$

$a+30b))$, che sarà la superficie del tri-
ngolo sferoidico, corrispondente al triangolo
OL, ed il quadruplo di questa equazione,
ne sarà

$\frac{5a}{7}(a+2b) - \frac{a}{14c}((a+2b)(a+30b))$,

arà il valore della superficie della Volta a
rociera col reguglio, di prima specie (*a*).
iocchè si dovea cercare.

AVVERTIMENTO.

Sicchè dunque per avere il valore della su-
rficie di una Volta a crociera col reguglio
prima specie, cioè che sia formata sopra
una pianta quadrata, e gli archi, che la
stengono sieno semicircolari, essendo dato il
to di detto quadrato, ed il reguglio, de-
si.

I. Dalla somma del rettangolo fatto dal la-
del quadrato, sopra del quale è formata la
tta Volta, e dal reguglio, più il quadrato
l reguglio, estraerne la radice quadrata, e

(a) *Corol. Avvert. 4 Teor. 1, Cap. 14.*

si noti, che sarà il valore di *c*.

II. Dopo il numero costante 7, quindi volte il lato del quadrato che gli serve c base, e la somma del detto lato di quadrato più il duplo reguglio, si trovi un quarto pro porzionale, e si noti.

III. Dopo quattordeci volte la detta ra ce, il lato del quadrato, ed il prodotto de la somma del lato del quadrato, più il du plo reguglio, nella somma del lato del qu drato, più trenta volte il reguglio, si tro un quarto proporzionale, e si noti.

IV. Finalmente dal primo quarto propo zionale, se ne tolga il secondo, ed il resid sarà il valore della superficie di detta Volt

Sia, per esempio, $a = 15$; $b = 1$; sa $e = 4$. Indi si facci, come il numero costan 7, a quindeci volte il lato del quadrato, 22 così la somma del detto lato di quadrato più il duplo reguglio, 17, al quarto propo zionale $546\frac{2}{7}$; e si noti. Si facci inoltr come quattordici volte la detta radice, ch 56, al lato del quadrato ch'è 15, così prodotto della somma del lato del quadrat più il duplo reguglio, nella somma del l del quadrato, più trenta volte il regug qual prodotto sarà 765., al quarto proporz nale $203\frac{51}{55}$. Finalmente dal primo qua proporzionale se ne tolga il secondo, il re duo $341\frac{29}{56}$, sarà il valore della superficie detta Volta a crociera col reguglio di pri specie.

PR

PROBLEMA II.

Trovare una formola generale per avere il valore della superficie di una Volta a crociera col reguglio di seconda specie

Sia LK=a ; ML=d ; sia il sesto Ln=$\frac{a}{2}$; ed il reguglio sia = b= Dt. Sarà il sesto, più il reguglio, che è DO=$\frac{a}{2}+b$; (Tav. V fig. 43. n. 2.)

l'asse commune essendo 2DO, sarà $a+b$: l medesimo asse, meno b, sarà $a+b$ che oltiplicandolo per b, si averà $ab+b^2$, che rà il rettangolo fatto dall' ascissa, nella reute porzione del medesimo asse; Onde sarà $\overline{ab+b^2}$= Ou ; e sia $\sqrt{ab+b^2}=c$ Insi facci: come $\frac{d}{2}=\frac{a+b}{2}$, al quarto proporzionale, che rà $\frac{ad+2db}{4c}$=CO (a)

osi ancora si facci, come $\frac{a}{2}=\frac{a}{2}+b$, al quarto proporzionale, che

(a) *Probl.* 2. *Cap.* 1.

sarà $\frac{a_2 + 2ab}{4c} = EO$;

Onde sarà $Cn = \frac{ad+2db}{4c} - \frac{d}{2}$

La somma del sesto, e reguglio, ch'è $OD = Oq = \frac{a+2b}{2}$. Si facci, come OC, a Cn

così Oq, al quarto proporzionale, che dari qu (*a*), che secondo gli caratteri algebraici la detta proporzione, sarà

$\frac{ad+2db}{4c} : \frac{ad+2db}{4c} - \frac{d}{2} = \frac{a+2b}{2} : a^2+$

$\frac{4ab+4b^2-2ac-4bc}{2a+4b} = \frac{a+2b}{2} - c = qu$

Sarà l'arco bqa $= a+\frac{a+2b}{2} - c = \frac{3a+2}{2}$

$-c$ (*b*)

Onde sarà il trangolo sferico, corrispondent al settore Obqa $= \left(\frac{3a+2b}{2} - c\right)\left(\frac{a+2b}{2}\right.$

$= \frac{3a^2+8ab+4b^2}{4} - \frac{ac-2bc}{2}$ (*c*) $= A$

Inoltre il perimetro del semicerchio, che h per diametro mq sarà $\frac{1}{4}\frac{1}{4}(mn + 2On)$(*d*) $=$

(a) *Teor.* 3. *Cap.* 14.
(b) *Avvert.* 2. *Teor.* 3. *Cap.* 14.
(c) *Corol. Teor.* 2. *Cap.* 14.
(d) *Teor.* 1. *Cap.* 2.

$\frac{4}{14}(2a+4b) = \frac{11a+22b}{7}$

La superficie del semisegmento sferico aqb, sarà $\left(\frac{a+2b}{2} - c\right)\left(\frac{11a+22b}{7}\right)(a) =$

$\frac{11^2+44ab+44b^2}{14} - \frac{11ac-22bc}{7} = B$

Onde il triangolo sferico, corrispondente al triangolo bOa sarà $A - B = 3a^2 + \frac{8ab+4b^2}{4} - ac - 2bc - \frac{11a^2}{2} - \frac{44ab}{14} - \frac{44b^2}{7} + \frac{11ac}{2} + 22bc = \frac{15ac+30bc}{14} - a^2 - \frac{32ab-60b^2}{28}$.

Essendo $Ou = c$, sarà il triangolo $bOa = \frac{ac}{2}$, ed il triangolo $KOL = \frac{ad}{4}$.

Ma la ellissi ABCD, è base del semisferoide, e la superficie del triangolo sferoidico, sta alla superficie del triangolo sferico corrispondente, come il triangolo corrispondente al triangolo sferoidico al triangolo corrispondente al triangolo sferico (*b*); Dunque facendo come

X 4 *ac* :

(a) *Prop.* 49. *de sphae., et Cyl. Caravelli.*
(b) *Corol. Avvert.* 1. *Teor.* 1. *Cap.* 14.

$\frac{ac}{2} : \frac{ad}{4} = \frac{15ac+30bc}{14} - \frac{a^2-32ab-60b^2}{28}$,

al quarto proporzionale $\frac{15ad+30bd}{28} - \frac{a^2d}{56c} - \frac{32abd}{56c} - \frac{60b^2d}{56c} = \frac{15d}{28}(a+2b) - \frac{d}{56c}((a+2b)(a+30b))$, che sarà la superficie del triangolo sferoidico, corrispondente al triangolo KOL, ed il quadruplo di questa equazione, che sarà $\frac{15d}{7}(a+2b) - \frac{d}{14c}((a+2b)(a+30b))$, darà il valore della superficie della Volta a crociera col reguglio di seconda specie (*a*). Ciocchè si dovea cercare.

AVVERTIMENTO.

Sicchè dunque per avere il valore della superficie di una Volta a crociera col reguglio di seconda specie, cioè, che sia formata la Volta sopra una pianta rettangolare, e gli archi, che la sostengono due siano semicircolari, due semiellittici, essendo data la lunghezza, la larghezza, il sesto, ed il reguglio, devesi.

I. Dalla somma del rettangolo fatto dal diametro del semicerchio, nel reguglio, più il

(a) *Corol. Avvert. 4. Teor. 1. Cap. 14.*

il quadrato del reguglio medesimo, estraerne la radice quadrata, che sarà il valore di c, e si noti.

II. Dopo il numero costante 7, quindeci volte l'asse della semiellissi, e la somma del diametro del semicerchio, più il duplo reguglio, si trovi un quarto proporzionale, e si noti:

III. Dopo quattordici volte la detta radice, la corda dell'arco ellittico, ed il prodotto della somma del diametro dell'arco semicircolare, più il duplo reguglio, moltiplicata per la somma del detto diametro dell'arco semicircolare, più trenta volte il medesimo reguglio, si trovi un'altro quarto proporzionale, e si noti.

IV. Finalmente la differenza de' descritti due quarti proporzionali, sarà il valore della superficie di detta Volta a crociera col reguglio di seconda specie.

Sia, per esempio, $d=20$; $a=15$; sarà il sesto $=7\frac{1}{2}$, sia $b=1$; sarà $c=4$. Indi si facci, come il numero costante 7, a quindeci volte la corda dell'arco ellittico, ch'è 300, così la somma del diametro dell'arco semicircolare, più il duplo reguglio, ch'è 17, al quarto proporzionale $728\frac{4}{7}$, e si noti. Inoltre si facci, come quattordici volte la detta radice, ch'è 56, alla corda dell'arco ellittico, ch'è 20, così la somma del diametro dell'arco semicircolare, più il duplo regu-

guglio, moltiplicato per la somma del detto diametro dell' arco semicircolare, più trenta volte il detto reguglio, ch' è 765, al quarto proporzionale 273 $\frac{3}{14}$. Finalmente la differezza de' detti quarti proporzionali, ch' è 455 $\frac{5}{14}$, sarà il valore della superficie di detta Volta a crociera col reguglio di seconda specie.

PROBLEMA III.

Trovare una formola generale per avere il valore della superficie di una Volta a crociera col reguglio di terza specie.

Tav. V. fig. 43. n. 3. Sia LK = LM = a; il sesto sia = e il reguglio = b. Sarà Lt = Lq = Or = $\frac{a}{2}$; e sarà il sesto, più il reguglio, ch' è Om = $e+b$; e l' asse commune alli due ellittoidi essendo 2Om, sarà $2e+b$; e 'l medesimo asse, meno b, sarà $2e+b$; che moltiplicando per b, si averà $2eb+b^2$, che sarà il rettangolo fatto dall' ascissa, nella restante porzione del medesimo asse; Onde sarà $\sqrt{2eb+b^2}$ = Os; e sia $\sqrt{2eb+b^2}$ = c;

Ciò

Ciò posto OD : Or = OE : Ot (*a*)
Ma OD = Oi , come raggi dello stesso cerchio
Dunque Oi : Or = OE : Ot ;
Ma Oi : Or = Og, ovvero Om : Os (*b*)
Dunque Om : Os = OE : Ot ,
ed invertendo Os : Om = Ot : OE
Sicchè facendosi , come
$e : e + b = \frac{a}{2}$, al quarto proporzionale, che sarà

$$\frac{ae + ab}{2c} = CO = EO \ (c),$$

Onde $Cg = Et = \frac{ae+ab}{2c} - \frac{a}{2}$; ed ic = ML = *a*

Si facci inoltre . come OE : OM = Et , al quarto proporzionale , che darà ms. (*d*) , che secondo gli caratteri algebraici , la proporzione sarà $\frac{ae + ab}{2c} : e + b = \frac{ae+ab}{2c} - \frac{a}{2} : \frac{e^2 +}{}$

$$\frac{2be+b^2-ec-bc}{e+b} = e+b-c = ms.$$

Ciò posto nel triangolo iOe , la sh , è parallela ad re , onde si averà , che
Oh : hs = Oe : er ,
ed invertendo hs : Oh = er : Oe
ovvero = ML : HF , essendo questi du-

(a) *Corol. Teor. 3. Cap. 14.*
(b) *Prop. 2. lib. 6.*
(c) *Probl. 2. Cap. 1.*
(d) *Teor, 3. Cap. 14.*

dupli di quelli ; Ma hs , è il sesto ; Oh , è eguale alla somma del sesto , e reguglio. Sicchè dunque facendo , come il sesto, alla somma del sesto, e reguglio , così ML, al quarto proporzionale, questo darà il valore di HF, che secondo l' espressione algebriaca la detta proporzione sarà e: $e+b=a$: $\frac{ae+ab}{e}$ = HF , Onde Sarà OH = Oi = $\frac{\frac{ae+ab}{e}}{2e}$

Indi nel triangolo iOe , la gh , e parallela ad ie ; sicchè facendo come Oi : ie = Og al quarto proporzionale, questo darà il valore di gh , che secondo l' espressione algebraica la detta proporzione sarà

$\frac{\frac{ae+ab}{e}}{2e}$: a = $e+b$: $2e$ = gh.

Sarà l' arco gmh = $2e+e+b-c$ = $3e+b-c$ (c) Onde sarà il triangolo sferico corrispondente al settore gOhm = $(3e+b-c)(e+b)$ = $3e^2+4eb+b^2-ec-bc$ (b) = A

Inoltre il perimetro del semicerchio , che ha per diametro mp = $\frac{11}{14}$ (mp+2mo) (c) = $\frac{11}{14}$ $(4e+4b)$ = $\frac{22e+22b}{7}$ La superficie del semisegmento sferico gmh , sarà $\frac{(22e+22b)}{7}$ $(e+$

(a) *Avvert.* 2. *Teor.* 3. *Cap.* 14.
(b) *Corol. Teor.* 2. *Cap.* 14.
(c) *Teor.* 1. *Cap.* 2.

$(e+b-c) = 22e^2+44eb+22b^2-22ec-22bc$

$(a) = B.$ 7

Sicchè dunque il triangolo sferico, corrispondente al triangolo gOh sarà $A-B = 3e^2+4eb+b^2-ec-bc-22e^2-44eb-22b^2+22bc$

7

$+22bc = 15ec+15bc-e^2-16eb-15b^2$

7

Essendo $Os = Om - ms = e+b-e-b+c = o$

Il triangolo gOh, sarà $\frac{c}{2} \times 2e = ec$;

e sarà il triangolo $MOL = \frac{a^2}{4}$;

Ma la superficie del triangolo ellittoidico, sta alla superficie del triangolo sferico corrispondente, come il triangolo corrispondente al triangolo ellittoidico, al triangolo corrispondente al triangolo sferico (*b*); Dunque facendo come

$ec : \frac{a^2}{4} = 15ec+15bc-e^2-16eb-16b^2$, al

7

quarto proporzionale $15a^2ec+a^2bc-a^2e^2-16a^2eb-15a^2b^2 = \frac{15a^2e}{28e}+\frac{15a^2b}{28ec}-\frac{a^2e^2}{28ec}-\frac{16a^2eb}{28ec}-15$

(a) *Prop.* 49. *de sphae., et Cyl. Caravelli*

(b) *Corol. Avvert.* 2. *Teor. I. Cap.* 14.

$-15a^2b^2 = \frac{15a^2}{28e}(e+b) - \frac{a^2}{28ec}((e+b)(e+15b))$, che sarà la superficie del triangolo ellittoidico, corrispondente al triangolo MOL, ed il quatruplo di questa equazione, che sarà $\frac{15a^2}{7e}(e+b) - \frac{a^2}{7ec}((e+b)(e+15b))$, darà il valore della superficie della Volta a crociera col reguglio di terza specie (*a*). Ciocchè si dovea cercare.

AVVERTIMENTO,

Sicchè dunque per avere il valore della superficie di una Volta a crociera col reguglio di terza specie, cioè, che sia formata sopra una pianta quadrata, e gli archi, che la sostengono siano ellittici, essendo dato il lato del quadrato sopra del quale è formata la detta Volta, il sesto, ed il reguglio, devesi

I. Dalla somma del duplo rettangolo fatto dal sesto, e dal reguglio, più il quadrato del reguglio, estrarne la radice quadrata, che sarà il valore di *c*, e si noti.

II. Dopò sette volte il sesto, quindeci volte il quadrato sopra del quale è formata la detta Volta, e la somma del sesto, e reguglio si noti un quarto proporzionale, e si noti.

(a) *Corol. Avvert. 4. Teor: 1. Cap. 14.*

III. Dopo sette volte il rettangolo fatto dal sesto, e dalla detta radice, il quadrato sopra del quale è costrutta la detta Vela, ed il prodotto della somma del sesto, e reguglio, per la somma del sesto, e quindeci volte il reguglio, si trovi un quarto proporzionale, e si noti.

IV. Finalmente la differenza de' detti quarti proporzionali, sarà il valore della superficie di detta Volta a crociera col reguglio di terza specie.

Sia, per esempio, $a = 15$, il sesto $e = 4$; il reguglio $b = 1$; sarà la radice $c = 3$. Si facci, come sette volte il sesto; ch' è 28, a quindeci volte il quadrato, sopra del quale è formata la detta volta. ch' è 3375, così la somma del sesto, e reguglio, ch'è 5, al quarto proporzionale $602\frac{1}{2}$ e si noti. Indi si facci, come sette volte il prodotto fatto dal sesto, e la detta radice, ch' è 84, al quadrato sopra del quale è formata la detta Volta, ch'è 225; così il prodotto della somma del sesto, e reguglio, nella somma del sesto più quindeci volte il detto reguglio, ch'è 95, al quarto proporzionale $254\frac{3}{4}$. Finalmente dal primo quarto proporzionale, se ne tolga il secondo, ed il residuo $348\frac{3}{4}$ sarà il valore della superficie della Volta a crociera col reguglio di terza specie.

PROBLEMA IV,

Trovare una formola generale, per avere il valore della superficie di una Volta a crociera col reguglio di quarta specie.

Tav. V. fig. 43. n. 4. Sia LK $= a$: LM $= d$; il sesto sia e; ed il reguglio, b; sarà il sesto più il reguglio, ch' è On $= e + b$: e l' asse comune alli due ellittoidi essendo 2Om, sarà $2e+2b$, e 'l medesimo asse, meno b, sarà $2e+b$: che moltiplicandolo per b, si averà $2eb+b^2$, che sarà il tettangolo fatto dall'ascissa, nella restante porzione del medesimo asse; e sia $\sqrt{2eb+b^2} = c$, che in appresso si farà vedere eguale ad Ou.

Ciò posto Od : Ox = OC : Oq (*a*)
Ma Od = Oc, come raggi dello stesso cerchio
Dunque Oc : Ox = OC : Oq :
Ma OC : Ox = Ob, ovvero Ou : Ou (*b*)
Dunque On : Ou = OC : Oq
ed invertendo On : On = Oq : OC
Sicchè facendosi, come

$c : e + b = \frac{d}{2}$, al quarto proporzionale, che sarà

(a) *Carol. Teor.* 3. *Cap* 14.
(b) *Prop.* 2 *lib.* 6.

sarà $\frac{de}{2c} + \frac{db}{2c} = OC$ (a);

onde sarà, $Cq = \frac{de + db}{2c} - \frac{d}{2}$

Si faccia inoltre, come $OC : Cq = On$, al quarto proporzionale, che darà un (b), che secondo i caratteri algebraici la proporzione sarà $\frac{de}{2c} + \frac{db}{2c} : e + b = \frac{de}{2c} + \frac{db}{2c} - \frac{d}{2} : \frac{e^2 + 2eb + b^2}{e + b} - ec - bc = e + b - c = nu.$

Ciò posto, nel triangolo cOx, la bu, è parallela alla cx; onde si avrà, che

Ob : bu = Oc, cx,

ed invertendo bu : Ob = cx : Oc

ovvero = LK : BD, essendo questi dupli di quelli; ma bu, è il sesto; Ob, è eguale alla somma del sesto, e reguglio; sicchè dunque facendo, come il sesto alla somma del sesto, e reguglio, così LK al quarto proporzionale, questo darà il valore di BD, che secondo la espressione algebraica la detta proporzione sarà

$: e + b = a : \frac{ae}{e} + \frac{ab}{e} = BD = Pd;$

onde $Od = Oa = \frac{ae + ab}{2e}$;

Y in-

(a) *Probl. 2. Cap. 1.*
(b) *Teor. 3. Cap. 14.*

indi nel triangolo aOC, la bf, è parallela a ca; sicchè facendo, come Oa: ac = Of, al quarto proporzionale, questo darà il valore di fb, che secondo l'espressione algebraica la detta porzione, sarà.

$ae+ab : a = e+b : 2e = bf.$

$2e$

Sarà l'arco fnb $= 2e+e+b-c = 3e+b-c$ (a); onde sarà il triangolo sferico, corrispondente al settore Obnf $= (3e+b-c)(e+b) = 3e^2 +4eb+b^2 - ec - bc$ (b) $= A$

Inoltre il perimetro del semicerchio, che ha per diametro mp $= \frac{11}{14}$ (mp + 2 On (c) $=$ $22e+22b$;

7

Sarà la superficie del semisegmento sferico corrispondente al segmento circolare bnf $=$ $\frac{22e+22b}{7}(e+b-c) = \frac{22e^2+44eb+22b^2}{7}$ $- 22ec - 22bc$ (d) $= B.$

Sicchè dunque il triangolo sferico, corrispondente al triangolo bOf, sarà $A - B = 3e^2 + 4eb + b^2 - ec - bc - \frac{22e^2 - 44eb - 22b^2 + 22ec}{7}$ $+ 22$

(a) *Avvert. 2. Teor. 3. Cap. 14.*
(b) *Corol. Teor. 2 Cap. 14.*
(c) *Teor. 1. Cap. 2.*
(d) *Prop. 49. de sphæ., et Cyl. Caravelli.*

$+ 22bc = 15ec + 15bc - e^2 - 16eb - 15b^2$

Essendo $Ou = On - nu = \frac{7}{7}e+b - e - b+e = e$

sarà il triangolo $bOf = \frac{c}{2} \times 2e = ec$,

ed il triangolo $LOK = \frac{ad}{4}$;

ma la superficie del triangolo ellittoidico, sta alla superficie del triangolo sferico corrispondente, come il triangolo corrispondente il triangolo ellittoidico, al triangolo corrispondente, al triangolo sferico (*a*); dunque facendo, come $ec : \frac{ad}{4} = 15ec+15bc-e^2-16eb-15b^2$,

il quarto proporzionale $\frac{15ade + 15adb - 7de^2 - 16adbe - 15adb^2}{28ec} = \frac{15ad}{28e}(e+b) - \frac{ad}{28ec}(e+b)(e+15b)$, che sarà la superficie del triangolo ellittico, corrispondente al triangolo KOL, ed il quadruplo di questa equazione, che sarà $\frac{15ad}{7e}(e+b) - \frac{ad}{7ec}(e+b)(e+15b)$ darà il valore della superficie della Volta a crociera col reguglio di quarta specie (*b*). Ciocchè si dovea cercare.

(a) *Corol. Avvert. 2. Teor. 1. Cap. 14.*
(b) *Corol. Avvert 4. Teor. 1. Cap. 14.*

AVVERTIMENTO I.

La descritta formola è generale per qualunque Volta o crociera, di qualsivoglia specie sia; sicchè dunque per avere il valore della superficie di qualsivoglia Volta a crociera, e di qualunque specie sia, essendo data la lunghezza, la larghezza, il sesto, ed il reguglio, devesi

I. Dalla somma del duplo rettangolo fatto dal sesto, e reguglio, più il quadrato del medesimo reguglio, estraerne la radice quadrata, che sarà il valore di c, e si noti.

II. Dopo sette volte il sesto, quindici volte il prodotto fatto dalla lunghezza, e larghezza, e la somma del sesto, e reguglio, si trovi un quarto proporzionale, e si noti.

III. Dopo sette volte il prodotto fatto dal sesto, e dalla detta radice, il prodotto fatto dalla lunghezza, e larghezza, ed il prodotto della somma del sesto, e reguglio, nella somma del sesto, più quindici volte il reguglio, si trovi un quarto proporzionale, e si noti.

IV. Finalmente la differenza dei detti due quarti proporzionali, sarà il valore della superficie di qualunque Volta a crociera col reguglio.

Sia, per esempio, $a = 15$; $d = 20$; il sesto $e = 4$; il reguglio $b = 1$; sarà la radice $c = 3$,

$c = 5$: indi si faccia, come sette volte il sesto, ch'è 28, a quindici volte il rettangolo fatto dalla lunghezza, e larghezza, ch'è 4500; così la somma del sesto, e reguglio, ch' è 5, al quarto proporzionale $803\frac{4}{7}$, e si noti. Si faccia inoltre, come il prodotto del sesto, e radice, sette volte preso, ch' è 84, al prodotto della lunghezza, e larghezza, ch'è 300; così la somma del sesto, e reguglio, moltiplicata per la somma del sesto, e quindici volte il raguglio, ch' è 95, al quarto proproporzionale $339\frac{2}{7}$. Finalmente dal primo quarto proporzionale, se ne tolga il secondo, ed il residuo $464\frac{2}{7}$, sarà il valore della snperficie della Volta a crociera col reguglio.

AVVERTIMENTO II.

Per avere con più speditezza il valore della superficie di nna Volta a crociera di qualunque specie ella sia, liberando il calcolo di essa dall' estrazioni della radice quadrata, il che porta tempo in appurarla, e si potranno incontrare numeri do non potersi esattamente estraerne la vera radice. Si è conosciuto mercè varj calcoli fatti su gli appurati, detti negli avvertimenti precedenti, che la superficie di una delle quattro lunette, dalle quali vien formata la Volta a crociera, stia, alla metà del prodotto del perimetro dell' arco, che sostiene detta lunetta, per il peri-

metro dell' arco, che principia dall' incrocicchiamento dei spighetti, e termina nel vertice dell' arco, che sostiene detta lunetta nella ragione di 19 : 20. Sicchè per avere il detto valore di superficie di Volta a crociera, devesi

Tav. IV Fig. 41. I. Trovare il perimetro di uno degli archi, che sostengono la detta Volta a crociera, e sia AFB, il quale se è semicerchio si avrà, siccome si è detto nel Teor. I. Cap. II.; e se è ellittico si prenderà la suttesa BF, del semiarco di esso, ed il suo perimetro si avrà, siccome si è detto nel Corol. V. Teor. III. Cap. II., qual perimetro si noti.

II. Il detto perimetro si moltiplichi per il perimetro dell' arco ellittico Fa, il quale forma la lunghezza di detta lunetta, e si prenderà combaciando la cordella nel giro di detto arco; e la metà di detto prodotto si noti.

III. Finalmente dopo i due numeri costanti 20, 19, e la detta metà di prodotto, si trovi un quarto proporzionale, il quadruplo di detto quarto proporzionale, sarà il valore della superficie di detta Volta a crociera, per essere la detta superficie quadrupla di una delle lunette, siccome si è detto nel Corollario Avvert. IV. Teor. I. Cap. XIV.

Sia, per esempio, il lato AB di una Volta a crociera di prima specie 15; siccome si è detto nell' Avvertimento del Probl. I. di questo Capitolo; il sesto EF, sarà $7\frac{1}{2}$, ed il re-

reguglio ab = 1, sarà il perimetro dell' arco AFB = 23. 55. Inoltre l' arco ellittico Fa, sarà 7. 63; il prodotto del perimetro dell' arco AFB, nel detto perimetro dell' arco ellittico Fa, sarà 179. 6865; la metà del quale sarà 89. 8432. Indi dopo i due numeri costanti 20, 19, e la detta metà di prodotto, si trovi il quarto proporzionale 85. 351, il quadruplo di esso, ch' è 341. 404, sarà il valore della superficie di detta Volta a crociera col reguglio, quale pratica concorda con quello detto nell' Avvertimento del Probl. I. di questo Capitolo.

CAP. XV.

Della solidità della Lunetta senza reguglio.

DEFINIZIONI.

I. PEr *Lunetta* s' intende, quel vuoto di fabbrica, che si fa nelle incosciature delle Volte, allorchè in dette incosciature vi si vogliano ricacciare dei lumi.

II. Si dice *corda* della Lunetta, quella retta, che unisce gli estremi del curvo ne' piedi dritti della Volta.

III. Per *sesto* s' intende la saetta del detto curvo.

IV. *Lunghezza* della Lunetta si è la retta, che unisce l' estremo del sesto da sopra il curvo, e la punta della detta Lunetta.

V. Se questa retta si combacia con detta lunghezza, si dirà *Lunetta senza reguglio*, nel caso contrario, si chiamerà *Lunetta col reguglio*.

TEOREMA I.

Tav. V. Fig. 45 SIa ABCD, un cilindro, e sia AGB, una sezione, la quale passi pel diametro AB, della base AEB del detto cilindro; dal centro F, s' innalzi la retta FE, perpendi-

dicolare al diametro, e si prolunghi fino ad incontrare la circonferenza nel punto E; dal punto E, s'innalzi la perpendicolare EG, alla base AEB, la quale incontra la sezione nel punto G, si unisca il punto G, col punto F, per mezzo della retta GF. Dico, che la superficie della porzione cilindrica GAE, la quale si chiamerà semiunghietta Cilindrica, sia eguale al prodotto del raggio AF, nella retta GE.

Si concepiscano i due piani NOM, nom, quali siano infinitamente vicini, e siano paralleli al piano GFE. Essendo le due rette NO, MO, parallele alle due rette GF, FE, sarà l'angolo NOM, eguale all'angolo GFE, (*a*), e l'angolo NMO, è eguale all'angolo GEF, come retti; dunque i due triangoli NOM, GFE, saranno simili tra loro, e perciò

EF : OM ≃ GE : NM (*b*).

Ma EF ≃ FM, come raggi dello stesso cerchio; dunque FM : OM ≃ GE : NM.

Inoltre supponiamo per lo punto M, tirata una tangente, la quale si vada ad unire col diametro BA, prolungato, si avrà un triangolo rettangolo nel punto M, e dal punto m, infinitamente vicino al punto M, sarà abbassata la mo; onde

FM :

(a) *Prop. 10. lib. 11.*
(b) *Prop. 4. lib. 6.*

FM : OM = Mm : Oo (*a*).

Sicchè Mm : Oo = GE : NM;

e perciò il prodotto di Mm, in NM, sarà eguale al prodotto di Oo, in GE (*b*); ma essendo NM, infinitamente vicina ad nm, il prodotto di Mm, in NM, sarà eguale al picciolo trapezio NMmn; dunque il prodotto della parte Oo, del raggio, in GE, sarà eguale al piccolo trapezio NMmn. Se si concepisca ora tutta la semiunghietta GAE, divisa in un numero infinito di questi piccioli trapezj, ognuno di essi sarà eguale al prodotto di GE, nella parte del raggio, corrispondente a detti trapezj: sicchè dunque la somma di essi, cioè la superficie della semiunghietta cilindrica GAE, sarà eguale al prodotto di GE, del raggio AF. Ciocchè si dovea dimostrare.

COROLLARIO I.

Onde la superficie della intiera unghietta cilindrica AGBE, sarà eguale al prodotto di EG, nel diametro AB.

COROLLARIO II.

La superficie della semiunghietta GAE si ha

(a) *Lemma Teor. 2. Cap. 3.*
(b) *Prop. 16. lib. 6.*

si ha moltiplicando la GE, per AF, ovvero FE, il triangolo GFE, essendo rettangolo in E, si ha moltiplicando GE, per $\frac{1}{2}$ FE; onde la superficie della semiunghietta GAE, sta al triangolo GFE, come il prodotto di GE, pel raggio AF, ovvero FE, al prodotto di GE, per la metà di FE, ovvero come 2: 1; sicchè dunque la superficie della semiunghietta GAE, sarà eguale al duplo triangolo GFE.

COROLLARIO III.

Da ciò si è dimostrato, si rileva, che la superficie della intiera unghietta Cilindrica AGBE, sarà eguale al quadruplo triangolo GFE.

TEOREMA II.

LA solidità della semiunghietta AGEF, è eguale ad una piramide, che ha per base la superficie di detta semiunghietta, e per altezza il raggio AF, della base del cilindro ABCD. *Tav. V. Fig. 45*

Suppongasi la stessa preparazione fatta nel Teorema precedente; concepiscasi indi divisa la superficie della seminghietta AGE, in un numero infinito di piccioli trapezj, e tirandosi dal centro F, agli angoli de' detti trapezj delle rette, resterà la semiunghietta AG-

AGFE, divisa in un numero infinito di piramidi, le quali avranno per altezza ognuna di esse il raggio del cerchio AEB, base del cilindro: ma la solidità di detta semiunghietta AGEF, è eguale alla somma delle dette infinite piramidi, nelle quali è divisa la detta semiunghietta, e la solidità della somma delle dette piramidi è eguale ad una piramide, che ha per base la somma delle basi delle dette infinite piramidi; cioè la superficie della semiunghietta AGE, e per altezza il raggio AF; dunque la solidità della semiunghietta AGEF, è eguale ad una piramide, che ha per base la superficie della detta semiunghietta AGE, e per altezza il raggio AF Ciocchè doveasi dimostrare.

COROLLARIO I.

Onde la solidità della intiera unghietta AGBE, sarà eguale ad una piramide, che ha per base la superficie della detta unghietta, e per altezza, il raggio AF.

COROLLARIO II.

La solidità della semiunghietta AGEF, è eguale alla piramide, che ha per base la superficie della detta semiunghietta, e per altezza il raggio AF; ma la superficie della detta semiunghietta è eguale al duplo triangolo

lo GFE (*a*); dunque la solidità della detta semiunghietta sarà eguale alla dupla piramide, che ha per base il triangolo GFC, e per altezza il raggio AF. Ma il prisma, che ha per base il triangolo GFE, e per altezza AF, sta alla piramide, che ha la stessa base, e la medesima altezza, come 3: 1 (*b*); ed il detto prisma, sta alla detta dupla piramide, come 3: 2; dunque il prisma, che ha per base il triangolo GFE, e per altezza il raggio AF, starà alla solidità della semiunghietta AGEF, nella ragione di 3: 2, e per conseguenza il prodotto del triangolo GFE, per i due terzi di AF, sarà il volore della solidità di detta semiunghietta.

COROLLARIO III.

Sicchè dunque la solidità del prisma, che ha per base il triangolo GFE, e per altezza il diametro AB, starà alla solidità della intiera unghietta AGBE, nella ragione di 3: 2.

AVVERTIMENTO I.

Essendo la superficie della semiunghietta dupla del triangolo che gli serve di base, sicchè due semiunghiette, le quali hanno i trian-

(a) *Corol.* 2. *Teor.* 1. *Cap.* 15.
(b) *Prop.* 7. *lib.* 12.

triangoli eguali, che gli servono di base, varanno le superficie uguali; e comecchè due triangoli sono nella ragione delle basi, se le altezze sono eguali, e sono in ragione delle altezze, se le basi sono eguali, così le superficie di due semiunghiette saranno in ragione delle loro altezze, se gli sesti sono eguali, ed al contrario saranno in ragione dei loro sesti, se le altezze sono eguali; e finalmente le superficie di due semiunghiette saranno in ragion composta dei sesti, e delle altezze, se questi sono disuguali.

In quanto poi alle loro solidità, siccome gli prismi, che hanno la stessa base, e la medesima altezza colle semiunghiette, stanno alle dette semiunghiette, nella ragione di 3: 2; così, se gli prismi sono eguali, saranno eguali ancora le semiunghiette, e comecchè gli prismi, che hanno eguali basi, sono nella ragione delle loro altezze, e così al contrario; così ancora saranno le semiunghiette, e tuttocciò, che si è dimostrato nei prismi si puole dimostrare nelle semiunghiette.

AVVERTIMENTO II.

Se si voglia attentamente riflettere, si anderà a conoscere, che ogni semiunghietta sarà una porzione di semipoliedro, ed infatti la superficie del semipoliedro è dupla della sua ba-

base (*a*), così ancora la superficie della semiunghietta è dupla del triangolo, che gli serve di base. La solidità del prisma, che ha la medesima base, e la stessa altezza col semipoliedro sta al semipoliedro, nella ragione di 3 : 2 (*b*); così ancora la solidità del prisma, che ha per base il triangolo GFE, e per altezza AF, sta alla semiunghietta, nella ragione di 3: 2.

AVVERTIMENTO III.

Se il cilindro ABCD, ha la base AEB, ellittica, la semiunghietta AGE sarà ellittica; e comecchè la superficie del semipoliedro ellittico, è eguale al rettangolo fatto dal perimetro della fezione massima, nell' altezza del detto semipoliedro (*c*); così, essendo la semiunghietta ellittica AGE, parte del detto semipoliedro, la sua superficie sarà eguale al rettangolo fatto da GE, altezza della semiunghietta, in AF. E siccome il prisma, che ha la medesima base e la stessa altezza col semipoliedro ellittico, sta al semipoliedro ellittico, come 3 : 2 (*d*), così il prisma, che ha per base il triangolo GEF, e per altezza

(a) *Corol. 4. Teor. 2. Cap. 3.*
(b) *Teor. 3. Cap. 3.*
(c) *Avvert. Teor. 7 Cap. 3*
(d) *Teor. 9. Cap. 3.*

za AF, sta alla semiunghietta ellittica AGFE, come 3 : 2.

AVVERTIMENTO. IV.

Tav. V. Fig. 46 Si genera la lunetta senza reguglio, se da un semicilindro se ne tolgano due semiunghiette ed una porzione di semipoliedro; sia il cilindro ACFE, e si concepiscano in esso le due unghiette DEIA, DFIC, se dal semicilindro ABCFDE, se ne tolgano le due semiunghiette DGEA, DGFC, e la porzione GCAD, la quale sarà una porzione di un semipoliedro il solido ACDB, sarà il vuoto, ossia l' anima della lunetta senza reguglio. Se la base del detto cilindro è circolare, la lunetta si dirà circolare, e se sarà ellittica si chiamerà lunetta ellittica.

PROBLEMA I.

Trovare una formola generale per avere il valore della solidità dell' anima della lunetta circolare.

Tav. V. Fig. 46. Sia ABCFDE, un semicilindro circolare, il quale sia diviso dalle due semiunghiette DGEA, DGFC, siccome si è detto nell' avvertimento precedente il solido ACDB, cioè il detto semicilindro, meno le dette due semiunghiette, e porzione di semipoliedro sarà

rà la lunetta circolare senza reguglio. Sia pertanto AC = a; sarà AH = BH = $\frac{a}{2}$; e sia la lunghezza BD = b;

Sarà la solidità del semicilindro ABCFDE = $\frac{11}{14}$ AC × BH × BD (a) = $\frac{11}{14} a \times \frac{a}{2} \times b$ = $\frac{11 a^2 b}{28}$ = A. La solidità della semiunghietta DGEA, sarà eguale al prodotto del triangolo AGE, per i $\frac{2}{3}$ di DG (b) = $\frac{ab}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{a}{2}$ = $\frac{a^2 b}{12}$.

Ed essendo la semiunghietta DGEA, eguale alla semiunghietta DGFC (c), sarà ancora la semiunghietta DGFC = $\frac{a^2 b}{12}$.

Onde la somma di esse sarà $\frac{a^2 b}{6}$ = B.

Inoltre la porzione del semipoliedro, che ha per base il triangolo AGC, e per altozza DG, sarà $\frac{ab}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{a}{2}$ (d) = $\frac{a^2 b}{6}$ = C.

(a) *Prop. 14. de circ. dim. Caravelli.*
(b) *Corol. 2. Teor. 2 Cap. 15.*
(c) *Avvert. 1. Teor. 2. Cap. 15.*
(d) *Teor. 3. Cap. 3.*

Sicchè la solidità dell' anima della lunetta ACBD, sarà A — B — C (a) = $\frac{11a^2b}{28}$ — $\frac{a^2b}{6}$ — $\frac{a^2b}{6}$ = $\frac{33a^2b}{84}$ — $\frac{28a^2b}{84}$ = $\frac{5a^2b}{84}$ = $\frac{5}{84}$ (a^2b).

Ciocchè si dovea cercare.

AVVERTIMENTO.

Sicchè dunque per avere il valore della solidità dell'anima della lunetta senza reguglio, che abbia l'arco semicircolare, essendo data la suttesa, e l'altezza di essa, devesi

I. Moltiplicare il quadrato della suttesa, o sia diametro, per l'altezza della lunetta, ed il prodotto si noti.

II. Dopo i due numeri costanti 84, 5, ed il detto prodotto si trovi un quarto proporzionale, questo sarà la solidità dell' anima della lunetta circolare senza reguglio.

PRO-

(a) *Avvert. 4. Teor. 2. Cap. 15.*

PROBLEMA II.

Trovare una formola generale per avere il valore della solidità della lunetta ellittica senza reguglio.

Sia il cilindro ACFE, ellittico, e concepiscasi la stessa preparazione fatta nel problema precedente. Sia perciò AC = a; BH = c; BD = b; sarà la superficie della semiellissi ABC = $\frac{11}{14}$ AC × BH (a) = $\frac{11}{14}$ ac. *Tav.V. Fig.46*

Onde il semicilindro ellittico ABCFDE = $\frac{11}{14}$ ac × b = $\frac{11acb}{14}$ = A.

La solidità della semiunghietta DGEA, = $\frac{ab}{4}$ × $\frac{2}{3}$ c (b) = $\frac{abc}{6}$.

Ed essendo la semiunghietta DGEA, eguale alla semiunghietta DGFC (c), sarà ancora la semiunghietta DGFC = $\frac{abc}{3}$.

Onde la somma di esse, sarà $\frac{abc}{3}$ = B

(a) *Teor. 4. Cap. 1.*
(b) *Avvert. 3. Teor. 2. Cap. 15.*
(c) *Avvert. 1. Teor. 2. Cap. 15.*

Inoltre la porzione del semipoliedro ellittico, che ha per base il triangolo AGC, e per altezza DG, sarà $\frac{ab}{2} \times \frac{2}{3} c$ (a) $= \frac{abc}{3} = C$; sicchè la solidità dell' anima della lunetta ACBD, sarà $A - B - C$ (b) $= \frac{11acb}{14} - \frac{abc}{3} - \frac{abc}{3} = \frac{33acb}{42} - \frac{28abc}{42} = \frac{5abc}{42} = \frac{5}{42}(abc)$. = Ciocchè si dovea cercare.

AVVERTIMENTO. I.

Sicchè dunque per avere il valore della solidità di una lunetta ellittica senza reguglio, essendo data la suttesa, il sesto, e la lunghezza di essa, devesi

I. Moltiplicare il sesto, per la suttesa, e per la lunghezza, ed il prodotto si noti.

II. Dopo i due numeri costanti 42, 5, ed il detto prodotto, si trovi un quarto proporzionale, qnesto sarà il valore della solidità dell' anima della lunetta ellittica senza reguglio.

AV-

(a) *Teor. 9. Cap. 3.*
(b) *Avvert 4. Teor. 2. Cap. 15.*

AVVERTIMENTO II.

Si noti, che questa ultima formola è generale, e pertanto si puole avere ancora la solidità dell' anima della lunetta circolare senza reguglio, facendo uso della stessa regola detta nell' avvertimento precedente.

CAP. XVI

Delle superficie delle Lunette senza reguglio.

DEFINIZIONE.

Per superficie della Lunetta, s'intende la superficie del semicilindro, meno le superficie delle due semiunghiette.

PROBLEMA I.

Trovare una formola generale per avere il valore della superficie di una Lunetta circolare senza reguglio.

Tav. V. Fig. 46. Sia AC $= a$; BD $= b$; sarà AH $=$ BH $= \frac{a}{2}$;

la semicirconferenza ABC $= \frac{14}{11}$ (AC + 2BH) (a) $= \frac{11}{14}$ ($2a$),

e la superficie del semicilindro ABCFDE $= \frac{11}{14}$ $(2a)\ b = \frac{11ab}{7} =$ A.

Inol-

(a) *Teor. 1. Cap. 2.*

Inoltre la superficie della semiunghietta DGEA, essendo eguale al duplo triangolo AGE (*a*), sarà $\frac{ab}{2}$;

ed essendo il triangolo AGE, eguale al triangolo CGF, sarà la superficie della semiunghietta DGEA, eguale alla superficie della semiunghietta DGFC (*b*), e perciò la superficie della semiunghietta DGFC, sarà $\frac{ab}{2}$;

onde la somma delle dette due semiunghiette sarà $ab = B$.

Sicchè la superficie della lunetta ABCD, secondo la definizione, sarà $A - B = \frac{11}{7} ab - ab = \frac{11ab}{7} - \frac{7ab}{7} = \frac{4ab}{7} = \frac{4}{7} (ab)$. Cioccchè si dovea cercare.

AVVERTIMENTO

Sicchè dunque per avere il valore della superficie di una lunetta circolare senza reuglio, essendo cognita la suttesa, e la lunghezza, devesi

I. Moltiplicare la suttesa per la lunghezza di detta lunetta, ed il prodotto si noti.

II. Dopo i due numeri costanti 7, 4,

(a) *Corol. 2. Teor. 1. Cap. 15.*
(b) *Avvert. 1. Teor. 2. Cap. 16.*

ed il detto prodotto, si trovi un quarto proporzionale, questo sarà il valore della superficie della detta lunetta.

PROBLEMA II.

Trovare una formola generale per avere il valore della superficie di una lunetta ellittica senza reguglio.

Tav. V. Fig. 46. Suppongasi il semicerchio ABC, essere una semiellissi; e sia AC $= a$; BH $= c$; BD $= b$; ed AB $= d$.

Sarà il perimetro della semiellissi ABC $= \frac{3141}{2828}(2d)\ (a) = \frac{3141d}{1414}$;

e la superficie del semicilindro ABCFDE, sarà $\frac{2141d}{1414} \times b = \frac{3141bd}{1414} = A$.

Inoltre la superficie della semiunghietta DGEA, sarà $b \times c = bc\ (b)$,

ed essendo la semiunghietta DGEA. eguale alla semiunghietta DGFC, avendo AE $=$ FC, e l'altezza DG, di comune, sarà ancora la superficie della semiunghietta DGFC $= bc$; onde la somma delle dette due semiunghiette sarà $2bc = B$.

Sic-

(a) *Corol. 4. Teor. 2. Cap. 2.*
(b) *Avvert. 3. Teor. 2. Cap. 15.*

Sicchè dunque la superficie della lunetto ABCD, secondo la definizione, sarà $A - B = \frac{3141bd}{1414} - 2bc = \frac{3141}{1414}(bd) - 2bc$. Ciocchè doveasi cercare.

AVVERTIMENTO.

Onde per avere il valore della superficie di una lunetta ellittica senza reguglio, essendo data la suttesa del semiarco, ovvero della semiellissi, il sesto e la lunghezza di detta lunetta, devesi

I. Moltiplicare la suttesa del detto semiarco, per la lunghezza della lunetta, ed il prodotto si noti.

II. Dopo i due nnmeri costanti 1414, 3141, ed il detto prodotto, trovisi un quarto proporzionale, e si noti.

III. Finalmente dal detto quarto proporzionale se ne tolga il duplo prodotto del sesto, per la lunghezza, ed il residuo sarà il valore della superficie di detta lunetta senza reguglio.

CAP.

CAP. XVII.

Della solidità delle Lunette col reguglio.

AVVERTIMENTO.

Dividansi le lunette col reguglio in circolari, ed in ellittiche; se l' arco che forma la lunetta è circolare, si chiamerà lunetta circolare; e così all' apposto, se è ellittico. Nasce la lunetta col reguglio dalle sezioni semiunghiate che si fa in una quarta parte di sferoidico, ovvero ellittoidico; dalla prima si genera la lunetta circolare, e dalla seconda la ellittica. Suppongasi divisa la Volta a crociera col reguglio in quattro parti, diagonalmente, e da una delle quattro parti se ne tolga la porzione di poliedro, che ha per base il triangolo, che è base della quarta parte di detta Volta, e per altezza la somma del sesto, e reguglio, il residuo sarà la solidità della lunetta col reguglio.

PROBLEMA

Trovare una formola generale per avere il valore della solidità dell'anima di qualunque lunetta col reguglio.

Tav. V. Fig. 47 Sia OBMCa, una porzione di un semiellittoide, divisa di tal maniera, che la OM,

OM, la quale divide ad angoli retti la BC, sia un semiasse dello ellittoide; la aO, sia un altro semiasse, e la BC, sia parallela al terzo asse: dividasi la detta porzione pel piano BHC, che passi per BC, e sia perpendicolare ad OBMC; se dalla porzione OBHCa, del semiellittoide, se ne tolga la porzione semipoliedrica OBCa, il solido aBHC, sarà l'anima della lunetta ellittica, siccome si è detto nell'avvertimento precedente; per aO, ed OM, si faccia passare il piano aOM, il quale sarà un quadrante di ellissi, questo s'intersecherà con BHC, e la comune sezione HG, sarà il sesto della lunetta, indi per lo punto H, si tiri la Hb, parallela ad OM, la quale incontrerà la Oa, nel punto b, sarà la ba, il reguglio di detta lunetta. Sia pertanto la lunghezza di detta lunetta OG$=a$; la corda BC$=d$, il sesto HG$=e$; ed il reguglio ab$=b$; sarà Hb$=a$; e BG$=\frac{d}{2}$; ed aO$=e+b$; e $\frac{2}{3}$ aO$=\frac{2e+2b}{3}$; ed essendo l'asse, 2aO; sarà il detto asse $2e+2b$; ed il medesimo asse meno ab, sarà $2e+b$, il quale moltiplicandolo per b, si avrà $2eb+b^2$, che sarà il rettangolo fatto dall'ascissa ab, nella restante porzione del medesimo asse; e sia $\sqrt{2eb+b^2}=c$; indi facciasi, come c :

$a=$

$a = e + b$, al quarto proporzionale, che sarà $\frac{ae + ab}{c}$ = MO (a);

sarà MG = $\frac{ae + ab}{c} - a$;

ed il segmento BMC = $\frac{2}{3} d \left(\frac{ae+ab}{c} - a \right)$ (b) = $\frac{2ade + 2adb}{3c} - \frac{2ad}{3}$, aggiuntovi il triangolo BOC = $\frac{ad}{2}$, la somma $\frac{2ade + 2adb}{3c} - \frac{ad}{6}$, sarà la base OBMC, della porzione del semipoliedro quadriforme, la quale moltiplicandola per $\frac{2}{3}$aO, si avrà la sua solidità = $\frac{4ade^2 + 8adeb + 4adb^2}{9c} - \frac{ade}{9} - \frac{adb}{9}$ (c) = A. Ciò posto, il cono che ha per base la ellissi BHC, terminata, e per altezza la GM, sarà $\frac{11}{14} 2de + \frac{1}{3} \left(\frac{ae + ab}{c} - a \right) =$

$\frac{11ade_2 + 11adeb}{21c} - \frac{11ade}{21}$.

Inoltre l' altezza dell' altro segmento sarà $\frac{2MO}{}$

(a) *Probl. 2. Cap. 1.*
(b) *Avvert. Teor 2. Cap. 13.*
(c) *Avvert. 2. Teor. 6. Cap. 12.*

$2MO - MG = \frac{ae + ab}{c} + a,$

e la stessa altezza più il semiasse, sarà $\frac{2ae + 2ab}{c} + a$; sicchè facendo, come

$ae + ab + a : 2ae + 2ab + a = 11ade^2 + 11adeb - \frac{11ade}{21}$, al quarto proporzionale

$\frac{22ade^3 + 44ade^2b + 22adeb^2 + 11ade^2c + 11adebc - 22ade^2 - 22adeb - 11adec}{21ec + 21bc + 21c^2}$, questo sarà il segmento ellittoidico, corrispondente al segmento ellittico BMC (*a*); e la metà di esso, che è

$\frac{22ade^3 + 44ade^2b + 22adcb^2 + 11ade^2c + 11adebc - 22ade^2 - 22adeb - 11adec}{42ec + 42bc + 42c_2} = B$, sarà il semisegmento ellittoidico BHCM.

Inoltre la porzione OBCa, del semipoliedro, sarà $\frac{ad}{2}\left(\frac{2e + 2b}{3}\right) - \frac{ade + adb}{3}$ (*b*) $= C.$

Sicchè dunque la solidità dell'anima della lunet-

(a) *Avvert. 1. Teor. 2. Cap. 13.*
(b) *Teor. 9. Cap. 3.*

netta aBHC, siccome si è detto nell' Avvertimento precedente, sarà A − B − C = $4ade^2 + 8adeb + 4adb^2 - ade - adb -$

$\frac{9c}{22ade^2 - 44ade^2b - 22adeb^2 - 11ade^2c - 11adebc}$

$+ 22ade^2 + 22adeb + 11adec - \frac{ade - adb}{5} =$

$4ade^2 + 8adeb + 4adb^2 + 22ade^2 + 22adeb + 11adec$

$- 22ade^2 - 44ade^2b - 22adeb^2 - 11ade^2c -$

$11adebc - 4ade - 4adb = \frac{4}{9} d (e+b)^2 + 11ad$

$(2e + 2b + c) e - \frac{11ad}{9c} (2e^2 + 4eb + 2b^2 + ec$

$+ bc) e - \frac{4ad}{9} (e + b)$. Ciocchè si dovea cercare.

AVVERTIMENTO I.

Per avere il valore della solidità dell' anima della lunetta di qualunque specie col reguglio, essendo data la corda, il sesto, il reguglio, e la lunghezza di essa, devesi

I. Dal duplo prodotto fatto dal sesto, e reguglio, più il quadrato del medesimo reguglio, estraerne la radice quadrata, e si avrà il valore di *c*, e si noti.

II. Dopo nove volte la detta radice; quat-

quattro volte il rettangolo fatto dalla corda, e dalla lunghezza; ed il quadrato della somma del sesto, e reguglio si trovi un quarto proporzionale, e si noti.

III. Dopo quarantadue volte la somma del sesto, reguglio, e la detta radice; undici volte il prodotto fatto dalla corda, e dalla lunghezza; ed il prodotto della somma del duplo sesto, duplo reguglio, e la detta radice, pel medesimo sesto, si trovi un quarto proporzionale, e si noti.

IV. Dopo il prodotto di quarantadue volte la detta radice, moltiplicata per la somma del sesto, reguglio, e radice; undici volte il prodotto fatto dalla corda, e dalla lunghezza; ed il prodotto del sesto, per la somma del duplo quadrato del sesto, più il quadruplo prodotto fatto dal sesto, e reguglio, più il duplo quadrato del reguglio, più il prodotto fatto dal sesto, più il reguglio per la detta radice quadrata, trovisi un quarto proporzionale, e si noti.

V. Dopo il numero costante 9, il quadruplo rettangolo fatto dalla corda, e dalla lunghezza, e la somma del sesto, e reguglio, si trovi un altro quarto proporzionale, e si noti.

VI. Finalmente dalla somma de' due primi quarti proporzionali, se ne tolga la somma dei due secondi, il residuo sarà il valore della solidità dell' anima della lunetta col reguglio. Sia

Sia, per esempio, la corda $a = 10$; il sesto $e = 8$; il reguglio $b = 1$; la lunghezza $d = 30$; sarà la radice quadrata, ch' è il valore di $c = 4.12$. Indi facciasi, come nove volte la detta radice, ch' è 37.08, al quadruplo prodotto fatto dalla corda, e dalla lunghezza, ch' è 1200, così il quadrato della somma del sesto, e reguglio, ch' è 81, al quarto proporzionale 2621.35, e si noti. Facciasi poscia, come quarantadue volte la somma del sesto, reguglio, e radice, ch' è 551.04, ad undici volte il prodotto fatto dalla corda nella lunghezza, ch' è 3300, così il prodotto del sesto per la somma del duplo sesto, duplo reguglio, e la detta radice, ch' è 176.96, al quarto proporzionale 1059.75. Inoltre si faccia, come il prodotto di quarantadue volte la detta radice moltiplicata per la somma del sesto, reguglio, e radice, ch' è 2270.28 ad undici volte il prodotto fatto dalla corda nella lunghezza, ch' è 3300, così il prodotto del sesto, per la somma del duplo quadrato del sesto, più il quadruplo prodotto fatto del sesto, e reguglio, più il duplo quadrato del reguglio, più il prodotto fatto dalla radice, nella somma de sesto, e reguglio, qual prodotto si è 1592.64, al quarto proporzionale 2315, e si noti. E facciasi, come il numero costante 9, al quadruplo prodotto fatto dalla corda, e dalla lunghezza, ch' è 1200, così la somma del sesto

sto, e reguglio, ch'è 9, al quarto proporzionale 1200. Finalmente dalla somma dei due primi quarti proporzionali, ch' è 3681. 1, se ne tolga la somma de'due secondi, che è 3515, il residuo 166. 1, sarà il valore della solidità dell' anima della detta lunetta col reguglio.

AVVERTIMENTO II.

(Tav. V. Fig. 47)

Nell' Avvertimento IV. nel Problema del Capitolo XIII. si è detto, che il parellelepipedò, il quale ha la medesima base, e la stessa altezza coll' anima della Volta a crociera, sta alla solidità di detta Volta, nella ragione di 950: 199. Essendo la porzione ellittoidica OBHCa, la quarta parte di una Volta a crociera col reguglio, si averà che il prisma il quale ha per base il triangolo BOC, e per altezza la Oa, somma del sesto e reguglio, stia alla solidità di detta quarta parte di Volta a crociera col reguglio, come 950: 199, convertendo si averà che il detto prisma, stia alla quarta parte dell' anima della Volta a crociera, cioè alla porzione ellittoidica OBHCa, come 950: 751; ma il prisma, che ha per base il triangolo BOC, e per altezza aO, sta alla porzione poliedrica OBCa, come 3: 2 (*a*), e posto il

(a) *Teor.* 9. *Cap.* 3.

detto prisma 950, sarà la detta porzione poliedrica 633 $\frac{1}{2}$; Onde il medesimo prisma, sta alla porzione ellittoidica OBHCa, meno la porzione poliedrica $O^{B}Ca$, come 950: 117 $\frac{2}{3}$, ovvero come 2850: 353. Sicchè dunque per la totale prattica, per avere il valore della solidità di qualunque lunetta col reguglio, essendo nota la corda, il sesto, il reguglio, e la lunghezza di essa, devesi.

I. Moltiplicare la metà della corda, per la lunghezza, e per la somma del sesto, e reguglio, e si averà col prodotto, il prisma, e si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 2850, 353, ed il detto prodotto, si trovi un quarto proporzionale, questo sarà il valore della solidità dell'anima della lunetta col reguglio di qualunque specie sia.

Ed infatti adattando il detto metodo prattico nel proposto caso nell'Avvertimento precedente si averà la solidità dell'anima della lunetta col reguglio, la quale sarà 167. 2, e la differenza sarà di una unità, la quale si puole omettere, per la facilità, e brevità di calcolare.

CAP.

CAP. XVIII.

Della superficie della Lunetta col reguglio

AVVERTIMENTO I.

(Tav. V. Fig. 47)

La superficie della lunetta col reguglio, e quella istessa della superficie di una delle quattro lunette, che compongono la Volta a crociera col reguglio. Sicchè ponendosi la corda BC $= a$; il sesto GH$=e$; il reguglio ab$=b$; e la lunghezza OG$=d$; e facendo-si lo stesso calcolo algebraico di quello fatto nel Probl. IV. Cap. XIV. l'ultima equazione, che porta il valore della superficie della detta lunetta col reguglio, sarà $\frac{15ad}{14e}(e+b)-\frac{ad}{4ec})(e+b)(e+15b)$. Sichè dunque per avere il valore della superficie di qualunque lunetta col reguglio, essendo data la corda, il sesto, il reguglio, e la lunghezza di essa, si deve:

I. Dalla somma del duplo prodotto fatto dal sesto, e reguglio; più il quadrato del medesimo reguglio, estraerne la radice quarata, siccome si è detto nell' Avvert. I. Probl. IV. Cap. XIV. che sarà il valore di , e si noti.

II. Dopo quattordeci volte il sesto; quin
deci volte il prodotto della corda, per l
lunghezza; e la somma del sesto, e regu
glio, si trovi un quarto proporzionale, e
noti.

III. Dopo quattordeci volte il prodott
del sesto, e radice; il prodotto della corda
e la lunghezza; ed il prodotto della somm
del sesto, e reguglio, moltiplicata per l
somma del sesto più quindeci volte il regu
glio trovisi un altro quarto proporzionale
e si noti.

IV. Finalmente la differenza de'detti quar
ti proporzionali, sarà il valore della superfi
cie della lunetta col reguglio di qualunqu
specie sia.

Sia, per esempio, la corda $a = 15$; il se
sto $e = 4$; il reguglio $b = 1$; e la lunghezz
$d = 10$. Sarà la radice $c = 3$. Si facci
come quattordeci volte il sesto, ch' è 56,
quindeci volte il prodotto della corda, pe
la lunghezza, ch' è 2250, così la somma de
sesto, e reguglio, ch' è 5, al quarto pro
porzionale 200. 89, e si noti. Indi faccias
come il prodotto della radice, per il sest
preso quattordeci volte, ch'è 168, al prodott
della corda, e lunghezza ch'è 150, così i
prodotto della somma del sesto, e reguglio
moltiplicata per la somma del sesto, più quin
deci volte il reguglio, ch' è 95, al quart
proporzionale 84. 82, e si noti. Finalment
da

al primo quarto proporzionale, se ne tolga
l secondo, il residuo 116. 07. sarà il valore
ella superficie di detta lunetta col reguglio.

AVVERTIMENTO II.

Per avere con più facilità il valore della
perficie di una lunetta col reguglio, essendo
ota la suttesa, il sesto, ed il perimetro
ell' arco ellittico, il quale forma la lunghezza
detta lunetta, devesi fare la stessa ope-
zione detta nell' Avvert. II. Probl. IV.
ap. XIV. cioè

I. Devesi trovare il perimetro dell'arco,
l quale è data la suttesa, e questo molti-
icarlo per il perimetro dell' arco ellittico,
nghezza di detta lunetta, e la mettà del
odotto si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 20, 19,
la detta mettà di prodotto, si trovi un
arto proporzionale, questo sarà il valore
lla superficie di detta lunetta col reguglio.

CAP. XIX.

Della solidità delle varie specie di Volta a Cupola.

DEFINIZIONI

I. Si dice *Volta a Cupola*, quella che copre un edificio circolare, o ellittico.

II. Si dirà *Cupola sferica*, quando la Volta che copre un edificio circolare sarà un emisfero.

III. Si dirà *Cupola sferoidica*, o *ellittoidica*, allora quando la Volta sarà un semisferoide, ovvero un semiellittoide.

IV. *Asse* della Volta a Cupola si è l' altezza di essa.

V. *Base* della cupola, è quella figura la covertura della quale è la detta Cupola.

Da ciò ne nasce la generazione delle varie specie di dette Volte a Cupola. I. Se la base è circolare, e l' asse della Cupola, e la mettà del diametro di detta base, allora la Cupola è uno emisfero. II. Se la base è circolare, e l' asse è minore della mettà del diametro della base, allora la Cupola è un semisferoide depresso, intersecato da un piano che passa per l' asse maggiore, al quale gli sia perpendicolare l'asse minore. III. Se la base è ellittica, e l' asse di essa è la mettà dell'

asse

asse maggiore della base, allora la Cupola è un semisferoide depresso intersecato da un piano, che passa per l' asse minore, al quale gli sia perpendicolare l' asse maggiore. IV. se la base è circolare, e l' asse è maggiore della mettà del diametro della base, allora la Cupola è un semisferoide lungo, intersecato da un piano, che passa per l' asse minore, al quale gli sia perpendicolare l'asse maggiore. V. Se la base è ellittica, e l' asse della Cupola è eguale al semiasse minore della base, allora la detta Cupola è un semisferoide lungo intersecato da un piano, che passa per l' asse maggiore, al quale gli sia perpendicolare l' asse minore. VI. Finalmente se la base è ellittica, e l' asse della Cupola, è disuguale con gli semiassi della base, allora la detta Cupola è un semiellittoide.

Oltre delle descritte Cupole, vi sono le Volte, che coprono gli edificj di più lati, e queste si denominano *Volte a Cupola poligone*; E queste saranno semipoliedri, e si distinguono in sferiche, ed ellittiche, siccome si son divisi gli detti semipoliedri, allorchè di essi si è parlato nel Cap. III.

TEOREMA I.

La solidità del cubo circonscritto ad una sfera, sta alla solidità di detta sfera, nella ragione di 21 : 11.

(Tav. V. Fig. 48.)

Sia ABC, il cubo circonscritto alla sfea HIKL. Dico, che la solidità del cubo ABC, stia alla solidità della sfera HIKL, come 21 : 11.

S'intenda circonscritto attorno alla sfera HIKL, il cilindro DEFG, il quale averà la stessa altezza col cubo ABC; ed il cerchio DE, base del detto cilindro, sarà inscritto nel quadrato AR, base del cubo. La solidità del cubo ABC, sta alla solidità del cilindro DEFG, come il quadrato AR, al cerchio DE; perchè hanno eguali altezze; ma il quadrato AR, sta al cerchio DE, come 14: 11; (*a*) Dunque il cubo ABC, sta al cilindro DEFG, come 14: 11; Ma il cilindro DEFG, sta alle sfera HIKL, come 3 : 2 (*b*); e posto il cilindro 11, la sfera sarà $7\frac{1}{3}$; Dunque *ex æquo* il cubo ABC, starà alla sfera HIKL, come 14: $7\frac{1}{3}$ ovvero come 42: 22, oppure come 21: 11. Ciocchè doveasi dimostrare.

CO-

(a) *Prop.* 14. *de circ. dim. Caravelli.*
(b) *Corol. prop.* 68. *de sphaer. et Cyl. Caravelli.*

COROLLARIO.

Essendosi dimostrato, che il cubo circonscritto alla sfera, stia alla sfera, nella ragione di 21: 11; Onde anche le loro mettà saranno nella stessa ragione, e perciò il parallelepipedo MNC, circonscritto allo emisfero LHI, sta allo detto emisfero, come 21: 11.

AVVERTIMENTO.

Le Volte a cupola si costruiscono di maniera, che la parte esterna prende la stessa figura di quella interna, e comecchè la grossezza della fabbrica nella cima si fa minore della grossezza nel piede, perciò la figura esterna di detta Volta sferica, non sarà uno emisfero, ma prenderà la figura della seconda specie delle volte a cupola, onde trattando di quella si farà vedere, come si puole avere il valore della solidità di detta volta sferica; Ma se la figura esterna fusse ancora uno emisfero per avere il valore della solidità di una simile Volta a cupula, devesi.

I. Moltiplicare il quadrato, il lato del quale sia il diametro del cerchio esteriore, per l'asse di detta cupola più la grossezza della cima, ed il prodotto si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 21, 11, ed il detto prodotto, si trovi un quarto proporzionale, e si noti.

III. Si moltiplica il quadrato, il lato del quale sia diametro del cerchio interno, base di detta cupola, per l'asse di essa, ed il prodotto si noti.

VI. Dopo li due numeri costanti 21, 11, ed il detto prodotto si trovi un quarto proporzionale, e si noti.

V. Finalmente la differenza de'detti quarti proporzionali sarà il valore della solidità di detta volta a cupola.

Sia, per esempio, il diametro della base di una volta a cupola di prima specie 20, l'asse di essa sarà 10, e sia la grossezza nel piede 3, e quella nella cima lo stesso 3. Il prodotto del quadrato, il lato del quale sarà 26, che è diametro del cerchio esteriore, per la somma dell'asse, e grossezza alla cima, che è 13, sarà 8788; Facciasi come 21, ad 11, così il detto prodotto 8788, al quarto proporzionale $4603\frac{5}{21}$, e si noti, Il prodotto poi del quadrato, il lato del quale è 20, diametro del cerchio interno, per l'asse di essa, che è 10., sarà 4000. Indi facciasi come 21, ad 11, così il detto prodotto 4000, al quarto proporzionale $2095\frac{5}{21}$. Finalmente dal primo quarto proporzionale, se ne tolga il secondo, il residuo 2508, sarà il valore della solidità di detta volta a cupola.

TEO-

TEOREMA II.

Il parallelepipedo circonscritto ad uno sferoide depresso, sta alla solidità di detto sferoide nella ragione di 21 : 11.

(Tav. VI. Fig. 49)

Sia ABC, un parallelepipedo circonscritto allo sferoide depresso abcd. Dico, che il parallelepipedo ABC, stia allo sferoide depresso abcd, come 21 : 11.

Si concepisca la sfera agch, la quale abbia per diametro l'asse minore ac, del detto sferoide, e sia FGH, il cubo circonscritto alla detta sfera, il quale averà la stessa altezza col parallelepipedo ABC. La solidità dello sferoide depresso abcd, sta alla solidità della sfera agch, il diametro della quale è l'asse minore, come il quadrato dell'asse maggiore bd, al quadrato dell'asse minore ac (a); Ma il quadrato dell'asse maggiore, si è il quadrato ABRP, ed il quadrato dell'asse minore, si è il quadrato FGIK; Dunque lo sferoide depresso abcd, sta alla sfera agch, come il quadrato ABRP, al quadrato FGIK; Ma il quadrato ABRP, sta al quadrato FGIK, come il parallelepidedo ABC, al cubo FGH

(a) *Teor 3. Cap.* 6.

FGH (*a*); Dunque la sferoide depresso abcd sta alla sfera agch, come il parallelepipedo ABC, al cubo FGH, permutando, ed invertendo il parallelepipedo ABC, sta allo sferoide depresso abcd, come il cubo FGH, alla sfera agch; ma il cubo FGH, sta alla sfera agch, come 21 : 11 (*b*) Dunque il parallelepipedo ABC, sta allo sferoide depresso abcd, come 21 : 11. Ciocchè doveasi dimostrare.

COROLLARIO

Essendosi dimostrato, che il parallellepipedo circonscritto allo sferoide depresso, stia allo stesso sferoide, come 21 : 11; Onde anche le loro mettà saranno nella stessa ragione, e perciò il parallelepipedo circonscritto ad un semisferoide depresso, sta allo stesso semisferoide, come 21 : 11.

AVVERTIMENTO I.

Lo sferoide depresso è capace di due sezioni per formare le Volte a Cupola, cioè una che passa per l'asse maggiore, alla quale gli sia perpendicolare l'asse minore, siccome è il piano debf, ed essendo questo un cerchio, sa-

(a) *Prop.* 32. *lib.* 11.
(b) *Teor.* 1. *Cap.* 19.

sarà lo semisferoide dab, l' anima della seconda specie di Volta a Cupola; l'altra sezione allorchè passa per l'asse minore, alla quale gli sia perpendicolare l'asse maggiore, siccome è la sezione aecf, ed essendo questa una ellissi, ed Ob, essendo eguale ad Oc, si averà col semisferoide abc, la terza specie di Volta a Cupola.

AVVERTIMENTO II.

Costruendosi le Volte a Cupola con differenti grossezze di fabbrica, cioè che la grossezza della fabbrica nella cima, sia minore di quella nel piede di essa, perciò la figura esterna della Volta a Cupola di prima specie, sarà un semisferoide intersecato per un piano, il quale passi per l'asse maggiore, e gli sia perpendicolare l'asse minore, che vale a dire, la detta figura esterna della Volta a Cupola di prima specie, sarà la Volta a Cupola di seconda specie. La Volta a Cupola di seconda specie, averà la figura esterna di simile natura. La Volta a Cupola di terza specie, puole avere per figura esterna tanto un semisferoide lungo intersecato per un piano, che passi per l'asse maggiore, e gli sia perpendicolare l'asse minore, quanto un semiellittoide, sempre il valore della solidità di dette Volte si averà secondo il metodo detto nell' Avvertimento Teorema I. del corrente Capitolo. TEO-

TEOREMA III.

Il parallelepipedo circonscritto ad uno sferoide lungo, sta alla solidità di detto sferoide, nella ragione di 21 : 11.

(Tav. VI. Fig. 50.)

Sia il parallelepipedo FGH, circonscritto allo sferoide lungo abcd. Dico, che il parallelepipedo FGH, sta allo sferoide abcd, come 21 : 11.

Si concepisca descritta la sfera ebQd, la quale abbia per diametro l'asse maggiore db, dello sferoide, e sia ABC, il cubo circonscritto ad essa. Essendo abcd, sferoide lungo, sarà GHIK, quadrato, ed il cubo ABC, ed il parallelepipedo FGH, averanno per commune altezza l'asse maggiore db, dello sferoide. La solidità della sfera ebQd, sta alla solidità dello sferoide abcd, come il quadrato dell'asse maggiore db, al quadrato dell'asse minore ac (*a*); Ma il quadrato dell'asse maggiore si è BRCP, ed il quadrato dell'asse minore si è GIHK; Dunque la sfera ebQd, sta allo sferoide abcd, come il quadrato BRCP, al quadrato GIHK; ma il quadrato BRCP, sta al quadrato GIHK, come il cubo ABC, al

(a) *Teor.* 5. *Cap.* 6.

al parallelepipedo FGH (*a*); Dunque la sfera ebQd, sta allo sferoide abcd, come il cubo ABC, al parallelepipedo FGH, e permutando, ed invertendo il cubo ABC, sta alla sfera ebQd, come il parallelepipedo FGH, allo sferoide abcd; ma il cubo ABC, sta alla sfera ebQd, come 21 : 11 (*b*); Dunque il parallelepipedo FGH, sta allo sferoide abcd, come 21 : 11. Ciocchè doveasi dimostrare.

COROLLARIO.

Essendosi dimostrato, che il parallelepipedo circonscritto allo sferoide, sta allo sferoide medesimo, come 21: 11; onde anche le loro mettà saranno nella stessa ragione, e perciò il parallelepipedo circonscritto al semisferoide lungo, sta allo stesso semisferoide nella medesima ragione di 21: 11.

AVVERTIMENTO.

Lo sferoide lungo è capace di due sezioni per avere l' anima delle Volte a cupola, una per l' asse minore ac, ed essendo la sezione agch, un cerchio, ed essendo Cb, maggiore di Ca, il semisferoide abc, sarà la quarta specie di Volta a cupola; l' altra per un piano,

(a) *Prop.* 32. *lib.* 11.
(b) *Teor.* 1. *Cap.* 19.

no, che passa per l'asse maggiore db, al quale gli sia perpendicolare l'asse minore, ed essendo la sezione dgbh, una ellissi; ed essendo Ca, eguale a Cg, semiasse della detta Ellissi, sarà lo semisferoide dab, la quinta specie di Volta a Cupola; ed in tutti gli due casi sempre il parallelepipedo circonscritto a ciascuna di dette Volte a Cupola, sta alla solidità dell'anima di essa come 21: 11.

TEOREMA IV.

Il parallelepipedo circonscritto ad uno ellittoide, sta alla solidità di detto ellittoide nella ragione di 21 : 11.

(Tav. IV. Fig. 51.)

Sia ABC, il parallelepipedo circonscritto allo ellittoide abcd. Dico, che il parallelepipedo ABC, sta alla solidità dello ellittoide, come 21: 11.

Si concepisca la sfera fbed, la quale abbia per diametro l'asse minore bd, del detto ellittoide, e sia FGH, il cubo circonscritto a detta sfera, il quale averà la stessa altezza col parallelepipedo ABC. La solidità dello ellittoide abcd, sta alla solidità della sfera fbed, come il rettangolo circonscritto alla ellissi, sezione nello ellittoide, che si fa per l'asse maggiore, e medio, al quadrato circonscritto al cerchio massimo della sfera

ra (*a*) ; ma il detto rettangolo si è MN , ovvero il rettangolo ABRP , ed il detto quadrato si è FGIK ; Dunque lo ellittoide, abcd, sta alla sfera fbed , come il rettangolo ABRP , al quadrato FGIK , ma il rettangolo ABRP , sta al quadrato FGIK , come il parallelepipedo ABC , al cubo FGH (*b*) ; Dunque lo ellittoide abcd , sta alla sfera fbed , come il parallelepipedo ABC, al cubo FGH ; e permutando , ed invertendo il parallelepipedo ABC , sta allo ellittoide abcd, come il cubo FGH , alla sfera fbed ; ma il cubo FGH , sta alla sfera fbed , come 21 : 11 (*c*) ; Dunque il parallelepipedo ABC, sta allo ellittoide abcd , come 21 : 11. Ciocchè doveasi dimostrare.

COROLLARIO.

Essendosi dimostrato , che il parallelepipedo circonscritto allo ellittoide , sta al medesimo ellittoide , come 21 : 11 ; Onde anche le loro mettà saranno nella stessa ragione , e perciò il parallelepipedo circonscritto ad un semiellittoide , sta allo stesso semiellittoide, nella medesima ragione di 21 : 11.

(a) *Teor.* 7 *Cap.* 6.
(b) *Prob.* 32. *lib.* 11.
(c) *Teor.* 1. *Cap.* 19.

AVVERTIMENTO I.

Avendo lo ellittoide tre assi differenti, perciò lo semiellittoide di qualunque maniera sia diviso, passando la sezione per due de' suoi assi, e gli sia perpendicolare il terzo, il detto semiellittoide sarà la sesta specie di volta a Cupola.

AVVERTIMENTO II.

Sicchè dunque per avere il valore della solidità di qualunque Volta a Cupola, di lunghezza, e larghezza della base dell'anima di detta Volta, l'altezza di essa, la grossezza al piede, e quella alla cima, devesi.

I. Moltiplicare la lunghezza unita colle due grossezze nel piede, per la larghezza unita alle dette due grossezze, e per la somma dell'altezza più la grossezza alla cima, cioè calcolare il parallelepipedo circonscritto alla figura esterna, ed il prodotto si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 21, 11 ed il detto prodotto si trovi un quarto proporzionale, e si noti.

III. Si moltiplica indi la lunghezza, la larghezza, e l' altezza dell' anima di detta Volta a Cupola, ed il prodotto si noti.

IV. Dopo li due numeri costanti 21, 11 ec

ed il detto prodotto si trovi un quarto proporzionale, e si noti.

V. Finalmente dal primo quarto proporzionale se ne tolga il secondo, il residuo sarà il valore della solidità della volta a Cupola.

AVVERTIMENTO III.

Nel genere delle volte a Cupola descritte, si annoverano ancora quelle, che communemente vengono nominate a mezze scudelle, ovvero a Conche, e queste sono della stessa natura di quelle a cupola, differiscono soltanto, che siccome quelle coprono un edificio circolare, ovvero ellittico, queste a conca all' incontro coprono la fine di un tempio, la quale sia o semicircolare, o semiellittica; e comecchè queste tali sorte di Volte sono le metà delle descritte Volte a cupola, perciò anche il parallelepipedo che ha per base il rettangolo circonscritto al semicerchio, ovvero alla semiellissi, e per altezza, l' altezza della conca sta alla solidità dell' anima di detta Volta nella ragione 21 : 11. Sicchè dunque per avere la solidità di tali sorte di Volte devesi prima riflettere, se la grossezza della fabbrica forma la parte convessa nell' esterno, in tal caso la solidità di essa si averà siccome si è detto in quella a cupola nell' Avvertimento precedente; Ma se la grossezza della fabbrica sale in quadro, allora dalla so-

lidità dell' intiero contenuto di fabbrica se ne tolga l'anima di detta conca, la solidità della quale si averà siccome si è detto.

AVVERTIMENTO IV.

Si formano le Volte a cupola sopra piante di figura poligona, e queste tali sorte di Volte a cupola, si dicono poligone, e comecchè ogn'una di esse viene ad essere un semipoliedro, semipoliedro cavo, perciò per avere la solidità di esse, devesi dal semipoliedro esterno, toglierne quello interno, ed il residuo sarà la solidità della Volta a cupola poligona; per avere la solidità del semipoliedro di qualunque specie egli sia, vedesi nel Cap. III. in dove di essi si è parlato.

AVVERTIMEMTO V.

Anche di queste sorte di Volte a Cupola poligona, si formano le Volte a conca, le quali si chiamaranno volte a conca poligone e comecchè queste sono mettà di semipoliedri, onde la solidità di esse si averà, se la fabbrica esterna forma la stessa figura dell' interna, dalli due terzi del prisma che ha la medesima base, e la stessa altezza della figura, esterna, se ne tolga gli due terzi del prisma che ha la medesima base, e la stessa altezza della figura interna; ma se la fabbrica

e

esterna salisse a piombo, in tal caso dall'intiero solido di fabbrica, se ne tolga l'anima della Volta a conca poligona, la quale sarà eguale alli due terzi del prisma che ha la medesima base, e la stessa altezza con detta volta a conca di qualunque specie ella sia, siccome si è dimostrato nel cap. III.

AVVERTIMENTO VI.

Tutte le descritte volte a cupola servono per coprire gli tempj; alle volte accade, che volendosi fabricare un tempio di figura poligona, il lato della quale sia determinato, per sapere il raggio del cerchio, nel quale devesi inscrivere una tal figura, senza del qual cerchio non si puole formare la detta figura, ho formata la seguente tavola, nella quale si vede il rapporto, che ha il raggio del cerchio con li lati delle figure ordinate inscritte in esso, del triangolo fino alla figura del numero di 80. lati. Ho stimato dividere il raggio in parti 10000000, siccome è diviso nella trigonometria, il lato di ciascuna delle figure conterrà porzione di dette parti, siccome osservasi nella presente tavola.

numero de' lati	Parti che si contengono da ciascuno de' lati, posto il raggio 10000000.		
		18	3472993
		19	3291891
		20	3128689
		21	2980845
		22	2846296
		23	2723332
3	17320508	24	2610533
4	14142135	25	2506664
5	11755705	26	2410733
6	10000000	27	2321858
7	8677674	28	2239289
8	7653668	29	2162380
9	6840402	30	2090569
10	6180339	31	2023365
11	5634651	32	1960341
12	5176380	33	1901120
13	4786313	34	1845367
14	4450418	35	1792786
15	4158233	36	1743114
16	3907806	37	1696118
17	3674990	38	1651586

39	1609331	60	1046719
40	1569181	61	1029575
41	1530985	62	1012983
42	1494601	63	996917
43	1459906	64	981353
44	1426783	65	966275
45	1395129	66	951638
46	1364848	67	937445
47	1335852	68	923669
48	1308062	69	910291
49	1281404	70	897296
50	1255810	71	884666
51	1231218	72	872387
52	1207569	73	860444
53	1184812	74	848824
54	1162896	75	837513
55	1141776	76	826499
56	1121408	77	815771
57	1101755	78	805318
58	1082778	79	795130
59	1064443	80	785796

L'uso della descritta tavola si è, che se vogliasi descrivere un cerchio, nel quale vi

si deve inscrivere una figura ordinata, il lato della quale sia determinato, si averà il valore del raggio, facendo, come le parti, che contiene il lato di detta figura nella detta tavola descritto, alle parti che contiene il raggio, ch'è 10000000, così il dato lato, al quarto proporzionale, e questo sarà il valore del raggio. Si deve, per esempio, ritrovare un raggio per descrivere un cerchio, nel quale vi si possa inscrivere un decagono il lato del quale sia palmi 20; si trovi nella descritta tavola il lato del decagono essere parti 6180339, onde si facci, come 6180339, a 10000000, così il dato lato 20, al quarto proporzionale 32. 36, questo sarà il raggio del detto cerchio.

CAP.

CAP. XX.

Della superficie delle varie specie di Volte a Cupola.

TEOREMA I.

La superficie laterale del cubo circonscritto alla sfera, sta alla superficie sferica, come 14 : 11.

(Tav. V. Fig. 48.)

Sia il cubo ABC, circonscritto alla sfera LHIK. Dico, che la superficie laterale del cubo ABC, stia alla superficie della sfera LHIK, come 14: 11.

La superficie laterale del cubo ABC, è quadrupla del quadrato AS, per essere la detta superficie quattro quadrati, ovvero quadrupla del quadrato MN; la superficie della sfera LHIK, è quadrupla del cerchio massimo LPIQ, (*a*). Sicchè la superficie laterale del cubo ABC, sta alla superficie sferica LHIK, come il quadrato MN, al cerchio LPIQ; Ma il quadrato MN, sta al cerchio LPIQ, come 14: 11 (*b*); Dunque la superficie laterale del cubo ABC, sta alla superficie della sfera LHIK, come 14: 11. Ciocchè doveasi dimostrare. CO-

(a) *Prop. 36. de sphæ., et Cyl. Caravelli.*
(b) *Prop. 14 dr. circ. dim. Caravelli.*

COROLLARIO.

Essendosi dimostrato, che la superficie laterale del cubo circonscritto alla sfera, sia alla superficie sferica, come 14: 11. Onde anche le loro mettà saranno nella stessa ragione, e perciò la superficie laterale del parallelepepedo circonscritto ad uno emisfero, sta alla superficie dell'emisfero medesimo, come 14: 11.

AVVERTIMENTO

Sicchè dunque per avere il valore della superficie di una Volta a Cupola di prima specie, cioè che sia un emisfero, devesi.

I. Moltiplicare il quadruplo diametro, del cerchio, che gli serve di base, per l'altezza di detta Volta, ed il prodotto si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 14, 11, ed il detto prodotto, si trovi un quarto proporzionale, questo sarà il valore della superficie della Volta a Cupola di prima specie.

Sia, per esempio, una Volta a Cupola di prima specie, il diametro della base della quale, sia 20, e l'altezza di essa deve essere 10. Il prodotto del quadruplo diametro, per l'altezza sarà 800. Indi facciasi, come 14, ad 11, così 800, al quarto proporzionale $628\frac{4}{7}$, questo sarà il valore della superficie di detta Volta a Cupola di prima specie.

TEO-

TEOREMA II.

La superficie laterale del parallelepipedo circonscritto ad uno sferoide depresso, la base del quale sia il quadrato circonscritto al cerchio, sezione per l' asse maggiore, sta alla superficie dello sferoide depresso, nella ragione di 14: 11.

(Tav. VI. Fig. 49.)

Sia ABC, il parallelepipedo circonscritto allo sferoide depresso abcd. Dico, che la superficie laterale del parallelepipedo ABC, sta alla superficie dello sferoide depresso abcd, come 14: 11.

Si concepisca la sfera agch, la quale abbia per diametro l' asse minore ac, del detto sferoide, e sia FGH, il cubo circonscritto ad essa, il quale averà la stessa altezza col parallelepipedo ABC. La superficie dello sferoide abcd, sta alla superficie della sfera agch, come l' asse maggiore db, all'asse minore ac (*a*), ovvero come AB, ed FG; oppure come il perimetro del quadrato AR, al perimetro del quadrato FI, essendo questi quadrupli di quelli; ma il perimetro del quadrato AR, sta al perimetro del quadrato FI, come la superficie laterale del parallelepipedo ABC, alla superficie laterale del cubo FGH, avendo

(a) *Teor. 3. Cap. 7.*

do l' uno, e l' altro commune altezza; Dunque la superficie dello sferoide abcd, sta alla superficie della sfera agch', come la superficie laterale del parallelepipedo ABC, alla superficie laterale del cubo FGH, e permutando, ed invertendo, la superficie laterale del parallelepipedo ABC, sta alla superficie dello sferoide abcd, come la superficie laterale del cubo FGH, alla soperficie della sfera agch, ma la superficie laterale del cubo FGH, sta alla superficie della sfera agch, come 14: 11 (*a*); Dunque ancora la superficie laterale del parallelepipedo ABC, sta alla superficie dello sferoide abcd, come 14: 11. Ciocchè dovcasi dimostrare.

COROLLARIO.

Essendosi dimostrato, che la superficie laterale del parallelepipedo ABC, sta alla superficie dello sferoide abcd, come 14: 11; Onde anche le loro mettà saranno nella stessa ragione, e perciò la mettà della superficie laterale del parallelepipedo ABC, sta alla superficie dello semisferoide, come 14: 11.

AVVERTIMENTO I.

Generandosi la seconda specie di Volta a Cu-

(a) *Teor.* 1. *Cap.* 20.

Cupola dalla sezione, che si fa da uno sferoide depresso per un piano, il quale passi per l'asse maggiore, e gli sia perpendicolare l'asse minore, siccome è il circolo debf, sarà lo semisferoide dab, l'anima di detta Volta a Cupola, e comecchè nel Corol. Teor. precedente, si è dimostrato, che la superficie laterale del parallelepipedo MC, stia alla superficie delle semisferoide dab, come 14: 11, perciò per avere il valore della superficie di una Volta a Cupola di seconda specie, essendo dato il diametro del cerchio, che gli serve di base, e data l'altezza di essa devesi.

I. Moltiplicare il quadruplo diametro, per l'altezza di detta volta, ed il prodotto si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 14, 11, ed il detto prodotto, si trovi un quarto proporzionale, questo sarà il valore della superficie di detta volta a Cupola di seconda specie.

Sia, per esempio, il diametro del cerchio, che gli serve di base 20, l'altezza di esse 6; il prodotto del quadruplo diametro, per l'altezza sarà 480. Indi facciasi, come 14, ad 11, così 480, al quarto propozionale $377\frac{1}{7}$, questo sarà il valore della superficie di detta volta a Cupola.

AVVERTIMENTO II.

Si genera all' incontro la terza specie di volta a cupola, dalla sezione di uno sferoide

de depresso, la quale passa per l'asse minore, e gli sia perpendicolare l'asse maggiore, siccome è l'ellissi aecf, sarà lo semisferoide abc, l'anima della terza specie di Volta a Cupola. E comecchè nel Coroll. Teor. precedente si è dimostrato la mettà della superficie laterale del parallelepipedo ABC, stia alla superficie, dello semisferoide abc, come 14: 11, e la mettà della superficie laterale del parallelepipedo ABC, si è la somma de' rettangoli DS, BC, RE, perciò per avere il valore della superficie di una Volta a Cupola di terza specie, essendo dato l'asse maggiore, e l'asse minore della ellissi, che gli serve di base, e l'altezza di detta Volta, la quale dovrà essere la mettà dell'asse maggiore, devesi.

I. Moltiplicare il duplo asse meggiore; per l'asse minore, della ellissi, che gli serve di base, ed il prodotto si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 14: 11, ed il detto prodotto, si trovi un quarto proporzionale, questo sarà il valore della Volta a Cupola di terza specie.

Sia, per esempio, l'asse maggiore 20, l'asse minore 12, della ellissi, ch' è base di una Volta a Cupola di terza specie, l'altezza di essa dovrà essere 10; il prodotto del duplo asse maggiore, per l'asse minore sarà 480. Indi facciasi, come 14, ad 11, così 480, al quarto proporzionale 377 1/7, questo sarà il valore della superficie di detta Volta a Cupola di terza specie

TEO-

TEOREMA III.

La superficie laterale del parallelepipedo circonscritto ad uno sferoide lungo, l'altezza del quale sia l'asse maggiore, sta alla superficie dello stesso sferoide lungo nella ragione di 14 : 11.

(Tav. VI. Fig. 50).

Sia il parallelepipedo FGH, circonscritto allo sferoide lungo abcd. Dico, che la superficie laterale del parallelepipedo FGH, per lungo preso, stia alla superficie dello sferoide abcd, come 14 : 11.

Si concepisca la sfera ebQd, la quale abbia per diametro l'asse maggiore db, e sia ABC, il cubo circonscritto ad essa, il quale averà la stessa altezza del parallelepipedo FGH. Essendo la superficie della sfera ebQd, alla superficie dello sferoide abcd, come l'asse maggiore db, all'asse minore ac (*a*), ovvero come BP, a GK, oppure come il perimetro del quadrato BRCP, al perimetro del quadrato GIHK; ma il perimetro del quadrato BRCP, sta al perimetro del quadrato GIHK, come la superficie laterale del cubo ABC, alla superficie laterale del parallelepipedo FGH, avendo l'uno, e l'altro una commune altezza; Dunque la superficie della sfera ebQd, sta alla su-

(a) *Teor.* 5. *Cap.* 7.

superficie dello sferoide abcd, come la superficie laterale del cubo ABC, alla superficie laterale del parallelepipedo FGH; e permutando, ed invertendo la superficie laterale del cubo ABC, sta alla superficie della sfera ebQd, come la superficie laterale del parallelepipedo FGH, alla superficie dello sferoide abcd; Ma la superficie laterale del cubo ABC, sta alla superficie della sfera, come 14: 11 (*a*); Dunque la superficie laterale del parallelepipedo FGH, sta alla superficie dello sferoide abcd, come 14: 11. Ciocchè doveasi dimostrare.

COROLLARIO.

Essendosi dimostrato, che la superficie laterale del parallelepipedo circonscritto allo sferoide, stia alla superficie dello stesso sferoide, come 14: 11. Onde anche le loro mettà saranno nella stessa ragione, e perciò la mettà della superficie laterale del parallelepipedo circonscritto ad uno sferoide lungo, starà alla superficie del semisferoide, come 14: 11.

AVVERTIMENTO I.

Generandosi la quarta specie di Volta a cupola, dalla sezione che si fa in uno sferoide lungo, per l'asse minore alla quale gli sia

(a) *Teor.* 1. *Cap.* 20.

ia perpendicolare l'asse maggiore, ed essendo uesta sezione il cerchio agch, sarà il semi-feroide abc, la quarta specie di Volta a Cu-ola; e comecchè nel Corol. Teor. precedente si è dimostrato, che la superficie laterale el parallelepipedo HGD, essendo questa la nettà della superficie laterale del parallelepi-edo FGH, sta alla superficie del semisferoi-e abc, come 14: 11; perciò per avere il alore della superficie della Volta a Cupola i quarta specie, essendo dato il diametro del erchio, che gli serve di base, e l'altezza di ssa, devesi.

I. Moltiplicare il quadruplo diametro del erchio, che gli serve di base, per l'altezza i essa, ed il prodotto si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 14 e 11, l il detto prodotto, si trovi un quarto pro-orzionale, questo sarà il valore della super-ie della Volta a Cupola di quarta specie.

Sia, per esempio, data una Volta a Cupo-di quarta specie, il diametro del cerchio, e gli serve di base sia 20, e l'altezza sia ; il prodotto del quadruplo diametro per altezza sarà 1200. Indi facciasi, come 14 11, così 1200, al quarto proporzionnale $12\frac{6}{7}$, questo sarà il valore della superficie di etta Volta a Cupola.

AVVERTIMENTO II.

Si genera la quinta specie di Volta a Cupola dalla sezione, che si fa in uno sferoide luogo, per un piano il quale passa per l'asse maggiore, e gli sia perpendicolare l'asse minore; siccome è l'ellissi dgbh, sarà il semisferoide dab, l'anima della quinta specie di Volta a Cupola; e comecchè nel Corol. del Teor. precedente si è dimostrato, che la mettà della superficie laterale del parallelepipedo FGH, sta alla superficie dello semisferoide dab, come 14: 11, e la mettà della superficie laterale del detto parallelepipedo FGH, si è il quadruplo rettangolo DK; perciò per avere il valore della superficie della quinta specie di Volta a Cupola, essendo dati l'asse maggiore, e l'asse minore della ellissi, che gli serve di base, e l'altezza di detta Volta, la quale sarà eguale al semiasse minore della ellissi, che gli serve di base devesi.

I. Moltiplicare il quadruplo asse minore della ellissi, che gli serve di base, per il semiasse maggiore della stessa ellissi, ed il prodotto si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 14, 11, ed il detto prodotto, si trovi un quarto proporzionale, questo sarà il valore della superficie di detta Volta a Cupola di quinta specie.

Sia, per esempio, data una Volta a Cupola

la quinta specie l'asse maggiore della ellissi che gli serve di base sia 30, e l'asse minore 24, l'altezza di detta Volta sarà 12. Il prodotto del quadruplo asse minore, per il semiasse maggiore sarà 1440. Indi facciasi, come 10, ad 11, così 1440, al quarto proporzionale $1131\frac{3}{7}$, questo sarà il valore della superficie della data Volta a Cupola.

TEOREMA IV.

La superficie laterale del parallelepipedo circoscritto ad uno ellittoide, sta alla superficie dello stesso ellittoide, nella ragione di 14: 11.

(Tav. VI. Fig. 51.)

Sia ABC, il parallelepipedo circonscritto dllo ellittoide abcd, il quale abbia per ltezza l'asse minore bd. Dico, che la supericie laterale del parallelepipedo ABC, sta alla superficie dello ellittoide abcd, come 14: 11.

Si concepisca la sfera bedf, la quale abbia per diametro l'asse minore, e sia FGH, il ubo circonscritto ad essa, il quale averà per ltezza l'asse minore bd, commune col paralelepipedo ABC; l'asse medio sia gh, e l'asse aaggiore ac. La superficie dello ellittoide abcd, ta alla superficie della sfera bedf, come la omma dell'asse maggiore, e minore della elissi, sezione la quale passa per l'asse mag-

giore, e medio, al duplo l' asse minore (*a*), ovvero come la somma di ac, e gh, al duplo asse minore bd; oppure come il perimetro del rettangolo ABRP, al perimetro del quadrato FGIK, essendo questi dupli di quelli; Ma il perimetro del rettangolo ABRP, sta al perimetro del quadrato FGIK, come la superficie laterale del parellelepipedo ABC, alla superficie laterale del cubo FGH, avendo eguali altezze; Dunque la superficie dello ellittoide, abcd, sta alla superficie della sfera bedf, come la superficie laterale del parallelepipedo ABC, alla superficie laterale del cubo FGH, e permutando, ed invertendo, la superficie laterale del parallelepipedo ABC, sta alla superficie dello ellittoide abcd, come la superficie laterale del cubo FGH, alla superficie della sfera bedf; ma la superficie laterale del cubo FGH, sta alla superficie della sfera bedf, come 14: 11 (*b*); Dunque ancora la superficie laterale del parallelepipedo ABC, sta alla superficie dello ellittoide abcd, come 14: 11. Ciocchè doveasi dimostrare.

COROLLARIO.

Essendosi dimostrato, che la superficie laterale del parallelepipedo circoascritto allo ellit-

(a) *Teor.* 11. *Cap.* 7.
(b) *Teor.* 1 *Cap.* 20.

littoide, il quale ha per altezza l'asse minore, stia alla superficie dello stesso ellittoide, come 14: 11. Onde anche le loro mettà saranno nella stessa ragione, e perciò la mettà della superficie laterale del parallelepipedo circonscritto allo ellittoide, cioè il prodotto della summa dell' asse maggiore, e medio, per il semiasse minore, stia alla superficie del semiellittoide, come 14: 11.

AVVERTIMENTO I.

Sicchè dunque per avere la superficie della sesta specie di Volta a Cupola, essendo date le tre dimensioni di essa, devesi.

I. Moltiplicare la somma dell' asse maggiore, e medio, per l' asse minore, ed il prodotto si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 14, 11, ed il detto prodotto si trovi un quarto proporzionale, questo sarà il valore della superficie della sesta specie di Volta a Cupola.

Sia data, per esempio, una Volta a Cupola di sesta specie, la quale sia lunga 30, larga 22, ed alta 14; l' asse maggiore del semiellittoide sarà 30, l' asse medio sarà 28, ed il minore 22. Onde il prodotto della summa dell' asse maggiore, e medio, per il semiasse minore sarà 1276. Indi facciasi, come 14, ad 11, così 1276, al quarto proporzionale

$1002\frac{4}{7}$, questo sarà il valore della superficie di detta Volta a Cupola.

AVVERTIMENTO II.

Per avere il valore della superficie esterna delle Volte a Cupola, devesi prima riflettere di quale specie ella sia, ed indi si averà il suo valore facendo uso delle regole dette in ciascuna delle descritte specie; cioè se la figura esteriore fusse l'anima di una Volta di terza specie, si averà la superficie esterna facendo uso delle regola descritta nell' Avvert. II. Teor. II. del Corrente Capitolo, e così ancora se fusse di altra specie.

AVVERTIMENTO III.

Per avere poi il valore della superficie interna, ovvero esterna di una Volta a Conca, siccome queste tali sorte di Volte sono le mettà delle descritte Volte a Cupola, così si averà il valore della superficie, conoscendo prima di quale specie sia, ed adattando quella regola espressa in ciascuna delle dette specie, ponendoci l' altra mettà, e calcolandola come fusse una Volta a Cupola, prendendone la mettà; sarà il valore della superficie di detta Volta a conca, o interna, o esterna, secondo quale di essa si vuole.

Sia data, per esempio, una Volta a conca,

ca, la quale sia di larghezza 24, di fondato 15, e di altezza 12; ponendosi l'altra mettà dall' altra parte, diverrà una Volta a Cupola di lunghezza 30, di larghezza 24, e di altezza 12, la quale sarà di quinta specie; e comecchè la superficie di detta Volta, siccome si è detto nell' Avvert. II. Teor. III. del corrente Capitolo si è $1131\frac{3}{7}$, perciò la mettà di essa, che è $565\frac{5}{7}$ sarà il valore della superficie di detta mezza scudella, o sia Volta a conca.

AVVERTIMENTO IV.

Per avere il valore della superficie di qualunque Volta a Cupola poligona, si moltiplica il perimetro della figura, che gli serve di base per l' altezza di detta Volta, ed il prodotto sarà la superficie di essa; la ragione si è, che siccome queste Volte a Cupola sono semipoliedri di qualunque specie eglino siano, sempre le di loro superficie, sono eguali a quelle del prisma, che hanno la medesima base, e la stessa altezza.

Di una tal natura di Volte si formano ancora delle Volte a conca, la superficie di ciascuna di esse, si averà moltiplicando il perimetro, che racchiude la detta Volta a conca, il quale viene ad essere semiperimetro della base del semipoliedro, perfezzionandosi la detta Volta a conca, per l' altezza di essa; per essere la Volta a conca mettà del semipoliedro, ovvero mettà della Volta a Cupola poligona.

CAP. XXI.

Della solidità delle varie specie di Fescina.

DEFINIZIONI.

(Tav. VI. Fig. 52).

I. Per *Fescina* s'indende quella fabbrica fatta nelli quattro angoli di una pianta quadrata, o rettangola, allorchè sopra detta pianta, vi si deve eriggere una fabbrica circolare, o ellittica.

Sia ABCD, un quadrato inscritto nel cerchio abcd, il quale sia sezione massima di uno emisfero, del qual quadrato si alzi il parallelepipedo ABN, il quale abbia per altezza la mettà del lato AB, del detto quadrato, questo parallelepipedo taglierà dall'emisfero quattro semisegmenti laterali, ed un segmento verticale, il solido della piramide mistilinea FOHB, si chiamerà *Fescina* della cupola.

II. Se la *Fescina* è terminata ne'laterali da archi semicircolari, come sono AFB, BHC, si chiamarà *Fescina sferica*. Se gli detti archi uno è semicircolare, e l'altro semiellittico, ovvero tutti due sono semiellittici, allora la Fescina si denominarà *ellittica*.

(Tav. VI. fig. 53).

III. Se la Fescina non termina in un punto, allora si dirà *Fescina tronca*, siccome è la Fescina BRFEDC.

IV. *Lunghezza*, *e larghezza* della Fescina si diranno le due rette FO, OH, e *l' altezza* la retta OB.

AVVERTIMENTO

(Tav. VI. fig. 52)

Dalla generazione di detta solido è facile il comprendere, che ciascuna Fescina sia eguale ad una delle quattro incosciature della Volta a vela senza reguglio. Ma il parallelepipedo, che ha la medesima base, e la stessa altezza colle quattro incosciature della Volta a vela senza reguglio, sta alla solidità delle dette quattro incosciature, come 5250: 179 (*a*). Dunque il parallelepipedo ABN, sta alla somma delle quattro Fescine FOHB, HN KC, KRMD, MSFA, come 5250: 179; Onde la quarta parte del parallelepipedo, sta ad una Fescina, nella stessa ragione; perciò il parallelepipedo EBGQO, sta alla Fescina FOHB, come 5250: 179. Sicchè dunque per avere il valore della solidità della Fescina di qualunque specie ella sia, o sferica, o ellittica, essendo data la lunghezza la larghezza, e l'altezza di essa, devesi.

I. Moltiplicare la lunghezza, per la larghezza, e per l'altezza, ed il prodotto si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 5250, 179, ed il detto prodotto, si trovi un quarto

(a) *Corol. Avvert. Teor.* 8. *Cap.* 6.

to proporzionale, questo sarà il valore della solidità di qualunque specie di Fescina.

Sia data, per esempio, una Fescina sferica, ed essendo tale tutte tre le dimensioni si fanno eguali, e sia una di queste dimensioni 15; il prodotto della lunghezza, larghezza, ed altezza, sarà il cubo di 15, il quale sarà 3375. Indi facciasi come 5250, a 179, così 3375, al quarto proporzionale $115\frac{3}{4}$, questo sarà il valore della solidità di detta Fescina sferica.

PROBLEMA.

Trovare una formola generale per avere il valore della solidità di una fescina sferica tronca.

(Tav. VI Fig. 53).

Sia SDIT, un quadrato, il quale intersecca il cerchio NLn, sezione massima di uno Emisfero, nelli punti A, C, E, H, K, etc. e si concepisca sopra detto quadrato innalzato il parallelepipedo SDM, il quale abbia per altezza la BP, mettà della corda AC, questo parallelepipedo tagliarà dall'emisfero quattro semisegmenti laterali, ed un segmento verticale BFfb, il solido BRFEDC, sarà la fescina tronca. Si vuole pertanto trovare una formola generale per avere la solidità di detta Fescina tronca.

Sia perciò il raggio ON $= a$; sarà il diametro nN $= 2a$; e sia PC=EG= BP= FG=b; e così CD = DE $= c$. Sarà OP = GD $= b+c$; Onde sarà PN $= a - b - c$.

Il cerchio, che ha per diametro nN, sarà $\frac{11}{14}$ $nN^2(a) = \frac{11}{14} \times 4a^2 = \frac{22}{7} a^2$; e la superficie dell'emisfero sarà il duplo di detto cerchio, ch'è $\frac{44}{7} a^2$ (*b*) la quale moltiplicandola per $\frac{1}{3}a$, il prodotto $\frac{44}{21} a^3$, sarà la solidità di detto emisfero (*c*) la quarta parte di essa aNL, sara $\frac{11}{21} a^3 = A$.

Inoltre essendo $Oa = a$; $OQ = b$; $eBQ = GD = b+c$; la periferia del cerchio, che ha per raggio ON sarà $\frac{44}{7} a$ (*d*); la quale moltiplicandola per $aQ = a - b$, il prodotto $\frac{44a^2 - 44ab}{7}$, sarà la superficie del segmento bfFBa (*e*), e moltiplicandola per $\frac{2}{3}a$, il prodotto $\frac{44a^3 - 44a^2b}{21}$ sarà il settore sferico, corrispondente a detto segmento (*f*). Il cerchio all'incontro, che ha per raggio BQ, sara $\frac{11}{14} \times 4BQ^2 = \frac{11}{14}(2b+2c)^2 = \frac{22b^2+44bc+22c^2}{7}$, che moltiplicando per $\frac{1}{3}$ OQ

(a) *Prop.* 14. *de circ. dim. Caravelli.*
(b) *Prop.* 36. *de sphæ. et Cyl. Caravelli.*
(c) *Prop* 56. *de sphæ. et Cyl. Caravelli.*
(d) *Teor.* 1. *Cap.* 2.
(e) *Prop.* 49. *de sphæ.*, *et Cyl. Caravelli.*
(f) *Prop.* 57. *de sphæ*, *et Cyl. Caravelli.*

$OQ = \frac{b}{3}$, il prodotto $\frac{22b^3 + 44b^2c + 22c^2b}{21}$, sarà il cono, che ha per base il cerchio BF fb, e per altezza QO. Onde la solidità del segmento bfFBa sarà $\frac{44a^3 - 44a^2b - 22b^3 - 44b^2c - 22c^2b}{21}$, e la sua quarta parte BaFQ, sarà $\frac{22a^3 - 22a^2b - 11b^3 - 22b^2c - 11c^2b}{42}$ = B. Ciò posto, essendo nP = nN — PN = $2a - a + b + c = a + b + c$, ed nP + nO = $2a + b + c$; e sarà AC = $2b$ Sicchè sarà il cerchio, che ha per diametro AC = $\frac{11}{14}$ $AC^2 = \frac{11}{14} \times 4b^2 = \frac{22}{7} b^2$; il quale moltiplicandolo per $\frac{1}{3}$ PN, il prodotto $\frac{22ab^2 - 22b^3 - 22b^2c}{21}$, sarà il cono, che ha per base il cerchio, il diametro del quale sia AC, ed abbia per altezza PN. Indi facciasi come $a+b+c$: $2a+b+c = \frac{22ab^2 - 22b^3 - 22b^2c}{21}$, al quarto proporzionale $\frac{44ab^2 - 22b^3 - 22b^2c}{21}$, il quale sarà il segmento sferico corrispondente al segmento ANC (a).

On-

(a) *Corol. Teor.* 1. *Cap.* 13.

Onde il segmento, che saranno le due porzioni BNC, FLE, sarà $\frac{22ab^2 - 11b^3 - 11b^2c}{21}$ = C sicchè dunque la porzione sferica OPCEGBFQ, sarà $A - B - C = \frac{11}{21} a^3 - \frac{22a^3 + 22a^2b + 11b^3 + 22b^2c + 11c^2b - 22ab^3}{42} - 11b^3 - 11b^2c = \frac{22a^3 - 22a^3 + 22a^2b + 11b^2}{21} + \frac{22b^2c + 11c^2b - 44ab^2 - 22b^3 - 22b^2c}{42} = \frac{22a^2b + 33b^3 + 44b^2c + 11c^2b - 22ab^2}{42} = \frac{11b}{21} \left(\frac{2ab}{42}\right) \left(2a^2 + 3b^2 + 4bc + c^2\right) - \frac{11b}{21} (2ab)$. Cioccchè doveasi cercare.

AVVERTIMENTO.

Sicchè dunque per avere il valore della solidità di una Fescina tronca, essendo nota l'altezza di essa, la larghezza DC, del piede, ed il raggio ON, il quale si averà prendendo la mettà della diagonale AK, devesi.

I. Unire il duplo quadrato del raggio; più il triplo quadrato dell' altezza; più il quadruplo prodotto fatto dall'altezza, e dalla larghezza del piede: più il quadrato della medesima larghezza, e la somma si noti.

II.

II. Dopo il numero costante 42, undeci volte l'altezza, e la detta somma, si trovi un quarto proporzionale, e si noti.

III. Dopo il numero costante 21, undeci volte l'altezza, ed il duplo prodotto fatto dal raggio, e dall'altezza, si trovi un quarto proporzionale, e si noti.

IV. Finalmente la differenza de' detti quarti proporzionali sarà il valore della solidità della Fescina tronca.

Sia data, per esempio, una Fescina la di cui altezza b, sia 12; il raggio $a=20$, e la larghezza del piede $c=3$. Si unisca il duplo quadrato del raggio, che sarà 800; più il triplo quadrato dell' altezza, che sarà 432; più il quadruplo prodotto fatto dall' altezza, e dalla larghezza del piede, che sarà 144, più il quadrato della stessa larghezza, che sarà 9; la somma 1385 si noti. Dopo il numero costante 42; undeci volte l' altezza, che sarà 132, e la detta somma 1385, si trovi il quarto proporzionali $4352\frac{6}{7}$. Inoltre, dopo il numero costante 21, undeci volte l'altezza, che sarà 132, ed il duplo rettangolo fatto dal raggio, e dalla altezza, che sarà 480, si trovi il quarto proporzionale $3017\frac{6}{7}$. Indi dal primo quarto proporzionale, se ne tolga il secondo, il residuo $1335\frac{5}{7}$, sarà il valore della solidità di detta Fescina tronca.

CAP. XXII.

Della superficie delle varie specie di Fescine.

AVVERTIMENTO.

Si è distinta la Fescina in sferica, ed ellittica, e si è fatto vedere nel Capitolo precedente, che ciascuna di esse sia eguale ad una delle quattro incosciature della Volta a vela senza reguglio; Onde per avere la superficie della Fescina sferica è necessario ritrovare la ragion che passa tra la superficie de'due rettangoli che circondano la detta fescina, e la superficie di essa.

PROBLEMA I.

(Tav. VI. Fig. 52.)

Trovare la ragion che passa tra la somma de' due rettangoli FEBO, OBGH, e la superficie FHB; della Fescina.

Sia AB$=a$; sarà la somma della superficie de'quattro triangoli sferici FHB, HKC, KMD, MFA$=\frac{33}{7}a^2\sqrt{2}-\frac{44}{7}a^2$ (*a*); Onde la superficie del solo triangolo sferico FHB, ovvero della Fescina sferica, sarà $\frac{33}{28}a^2\sqrt{2}-\frac{11}{7}a^2$. Inoltre la somma delle superficie de'rettangoli FEBO, OBGH, sarà

a^2

(*a*) *Probl.* 1. *Cap.* 7.

$\frac{a^2}{2}$. Sicchè la somma della superficie de'rettangoli FEBO, OBGH, sta alla superficie FHB, della Fescina, come $\frac{a^2}{2} : \frac{33}{28} a^2 \sqrt{2} - \frac{11}{7} a^2$, ovvero come $14 a^2 : 33 a^2 \sqrt{2} - 44 a^2$; e dividendo tutti gli termini per a^2; si averà, che la somma delle superficie de'due rettangoli, che racchiudono la Fescina, stia alla superficie di detta Fescina, come 14: 33 $\sqrt{2}$ — 44, ovvero come 14: 2. 662, oppure come 14000: 2662, ch' è lo stesso di 7000: 1331. Ciocchè si andava cercando.

AVVERTIMENTO I.

Sicchè per avere il valore della superficie di una Fescina sferica, essendo data la larghezza di essa, devesi.

I. Moltiplicare la dupla larghezza, per l'altezza, la quale sarà eguale alla detta larghezza, ed il prodotto si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 7000, 1331, ed il detto prodotto si trovi un quarto proporzionale, questo sarà il valore della superficie di detta Fescina.

Sia data, per esempio, una Fescina la larghezza della quale sia 15, tale sarà la lunghezza, e l'altezza. Il prodotto della dupla larghezza, per l'altezza sarà 450. Indi facciasi, come 7000, a 1331, così 450, al quar-

quarto proporzionale 85 $\frac{79}{140}$, questo sarà il valore della superficie di detta Fescina.

AVVERTIMENTO II.

Per avere il valore della superficie delle Fescine ellittiche, devesi fare la stessa operazione di quella sferica, poichè gli rettangoli, che racchiudono le Fescine sferiche, della sfera inscritta ad uno sferoide, o ad uno ellittoide, stanno agli rettangoli, che racchiudono le Fescine ellittiche corrispondenti; nella stessa ragione della superficie della Fescina sferica, a quella ellittica corrispondente, siccome si è dimostrato nello intiero cap. VII. Sicchè dunque per avere il valore della superficie di qualunque Fescina, o sferica, o ellittica, di qualsivoglia specie siano, essendo data la lunghezza, larghezza, e l'altezza, devesi.

I. Moltiplicare la somma della lunghezza, e larghezza di essa, per l'altezza, ed il prodotto si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 7000, 131, ed il detto prodotto si trovi un quarto proporzionale, questo sarà il valore della superficie della Fescina di qualunque specie ella sia.

PROBLEMA II.

Trovare una formola generale per avere il valore della superficie della Fescina tronca sferica.

(Tav. VI. Fig. 53).

S' intenda fatta la stessa preparazione di quella del Problema Cap. XXI; sarà la superficie dell' emisfero $= \frac{44}{7} a^2$, siccome si è detto nell' enunciato problema; Onde il triangolo sferico NaL, ch' è la quarta parte dell' emisfero, sarà $\frac{11}{7} a^2 = A$.

La superficie del segmento verticale BFf$_b$a siccome si è detto nel citato problema, si $\frac{44a_2 - 44ab}{7}$, onde la sua quarta parte, che il triangolo sferico BaF, sarà $\frac{11a^2 - 11ab}{7} = B$

Inoltre la periferia del cerchio, che ha pe raggio ON, sarà $\frac{44}{7}a$, per il detto problema onde la semiperiferia sarà $\frac{22}{7}a$, la quale mol tiplicandola per PN, il prodotto $\frac{22a^2 - 22ab - 22ac}{7} = C$, sarà la superficie d semisegmento ABCN (*a*), ovvero sarà l somma delle superficie delle due porzio BNC

(a) *Prop.* 49. *de sphae., et Cyl. Caravelli.*

BNC, FEL, delli semisegmenti.

Sicchè la superficie BFEC, della Fescina tronca, sarà $A-B-C=\frac{11}{7}a^2 -$

$11\,a^2+11\,ab - 22a^2+22\,ab+22\,ac =$

$\frac{7}{33\,ab+22\,ac-22\,a^2} = \frac{7}{11a\,(3b+2c-2a)}$.

Ciocchè si andava cercando.

AVVERTIMENTO.

Sicchè dunque per avere il valore della superficie di una Fescina tronca, essendo data l'altezza, il raggio, o sia la mettà della diagonale, e la larghezza nel piede, devesi.

I. Sommare la tripla altezza, e la dupla larghezza del piede, e da questa, se ne deve togliere il duplo raggio, o sia la diagonale, ed il residuo si noti.

II. Dopo il numero costante 7, undeci volte il detto raggio, ed il detto residuo, si trovi un quarto proporzionale, questo sarà il valore della superficie delle Fescina tronca.

Sia data, per esempio, una Fescina l'altezza della quale sia 12; il raggio 20, e la larghezza del piede 3. La somma della tripla altezza, e la dupla larghezza del piede, sarà 42, da questa se ne tolga il duplo raggio, ch'è 40, il residuo sarà 2. Indi facciasi, come 7, ad undeci volte il detto raggio

ch'è

ch'è 220, così il detto residuo 2, al quarto proporzionale $63\frac{6}{7}$, questo sarà il valore della superficie di detta Fescina tronca.

IL FINE.

INDICE

Delle cose prattiche.

Della solidità della Volta a botte.

Modo di calcolare la solidità della Volta a botte di giusto sesto. pag. 11.
Modo di calcolare la solidità della Volta a botte di sesto depresso, e di soprasesto. 22
Ridurre la solidità di una Volta a botte di sesto depresso, o di soprasesto, ad una Volta di giusto sesto, che abbia la stessa solidità. 29
Modo di trovare la solidità di una volta a botte sostenuta da segmenti 33
Modo di trovare l'asse maggiore, e l'asse minore, essendo date due ordinate in una porzione ellittica. 34
Modo di segnare l'asse maggiore, e l'asse minore in una ellissi, nella quale sia incognito anche il centro. 37
Modo di calcolare la solidità di una Volta a botte Gotica. 42
Modo di calcolare la solidità de' tompagni di qualunque Volta. 42

Della superficie della Volta a botte.

Modo di calcolare la superficie di una Volta a botte di giusto sesto. 45

Modo di calcolare la superficie della quinta, o sia tompagno di qualunque Volta. 45
Modo di calcolare la superficie della Volta a botte formata da un segmento circolare.. 46
Modo di calcolare la superficie della Volta a botte ellittica. 58
Modo di calcolare la superficie della Volta a botte Gotica. 61

Della Volta Poliedrica.

Modo di calcolare la solidità, e la superficie della Volta poliedrica. 95

Della solidità della Volta a Gavetta.

Modo di calcolare la solidità della Volta a Gavetta circolare. 99
Modo di calcolare la solidità della Volta a Gavetta ellittica. 102

Della superficie della Volta a Gavetta.

Modo di calcolare la superficie della Volta a Gavetta circolare. 105
Modo di calcolare la superficie della Volta a Gavetta circolare di pianta quadrata. 106
Modo di calcolare la superficie della Volta a Gavetta ellittica. 108

Della solidità della Volta a vela senza reguglio.

Modo di calcolare la solidità di qualunque Volta a vela senza regulio. 157

Della

Della superficie della Volta a vela senza reguglio

Modo di calcolare la superficie di qualunque Volta a vela senza reguglio. 207 a 210

Della solidità della Volta a vela col reguglio.

Modo di calcolare la solidità di qualunque Volta a vela col reguglio. 227

Modo di calcolare la solidità della Volta a vela col reguglio sostenuta da quattro semicerchi, due maggiori degli altri 230

Della superficie della Volta a vela col reguglio

Modo di calcolare la superficie di qualunque Volta a vela col reguglio 249

Modo di calcolare la superficie della Volta a vela col reguglio sostenuta da quattro semicerchi due maggiori degli altri. 251

Della solidità della Volta a Crociera senza reguglio.

Modo di calcolare la solidità di qualunque Volta a crociera senza reguglio. 254

Della superficie della Volta a Crociera senza reguglio.

Modo di calcolare la superficie della Volta a crociera senza reguglio, sostenuta da quattro semicerchi. 258

Modo di calcolare la superficie della Volta a crociera senza reguglio, sostenuta da due semicerchi, e due semiellissi. 260
Modo di calcolare la superficie di una Volta a crociera senza reguglio, la pianta sia rettangolare, e sia sostenuta da quattro semiellissi. 262
Modo di calcolare la superficie di una Volta a crociera senza reguglio, la pianta sia quadrata, e sia sostenuta da quattro semiellissi. 263

Della solidità della Volta a crociera col reguglio.

Modo di calcolare la solidità di qualunque Volta a crociera col reguglio. 294
Altro modo più facile di calcolare la solidità di qualunque Volta a crociera col reguglio. 298

Della superficie della Volta a crociera col reguglio.

Modo di calcolare la superficie di una Volta a crociera col reguglio, formata sopra una pianta quadrata, e gli archi, che la sostengono siano semicircolari. 323
Modo di calcolare la superficie di una Volta a crociera col reguglio, formata sopra una pianta rettangolare, e gli archi, che la sostengono due siano semicircolari, e due semiellittici. 328
Modo di calcolare la superficie di una Volta a cro-

a crociera col reguglio, formato sopra una pianta quadrata, e gli archi, che la sostengono siano ellittici. 334
Modo di calcolare la superficie di una Volta a crociera col reguglio, formata sopra una pianta rettangolare, e gli archi, che la sostengono siano ellittici, qual metodo compete a tutte le descritte specie. 340
Altro modo prattico, e più facile per calcolare qualsivoglia Volta a crociera col reguglio. 342

Della solidità dell' anima della Lunetta senza reguglio.

Modo di calcolare la solidità dell' anima di qualunque lunetta senza reguglio. 356

Della superficie delle Lunette senza reguglio.

Modo di calcolare la superficie di una lunetta circolare senza reguglio. 359
Modo di calcolare la superficie di una lunetta ellittica senza reguglio. 361

Dalla solidità delle Lunette col reguglio.

Modo di calcolare la solidità dell' anima di qualunque lunetta col reguglio. 366
Altro modo più facile per calcolare la solidità dell' anima di qualunque lunetta col reguglio. 370

Della superficie della Lunetta col reguglio.

Modo di calcolare la superficie di qualunque lunetta col reguglio. 371
Altro modo più facile per calcolare la superficie di qualunque lunetta col reguglio. 373

Della solidità della Volta a Cupola.

Modo di calcolare la solidità di qualunque Volta a Cupola. 386
Modo di calcolare la solidità di qualunque volta a mezza scudella, ovvero a Conca. 387
Modo di calcolare la solidità di qualunque volta poligona, e volta a Conca poligona. 388

Della superficie della Volta à Cupola.

Modo di calcolare la superficie della volta a Cupola, la quale sia un Emisfero. 394
Modo di calcolare la superficie della volta a Cupola, la quale abbia la base circolare, e l'altezza sia minore del raggio del circolo, che gli serva di base. 397
Modo di calcolare la superficie della volta a Cupola, la quale abbia la base ellittica, e l'altezza sia eguale al semiasse della ellissi, che gli serve di base. 398
Modo di calcolare la superficie della volta a Cupola, la base della quale sia circolare, ed abbia l'altezza maggiore del raggio del cerchio, che gli serve di base. 401

Modo

Modo di calcolare la superficie della Volta a Cupola, la quale abbia per altezza il semiasse minore della ellissi che gli serve di base. 402
Modo di calcolare la superficie di qualunque altra Volta e Cupola. 405
Modo di calcolare la superficie esterna di qualunque volta a cupola 406
Modo di calcolare la superficie interna, o esterna di qualunque volta a mezza scudella, o a conca. 406
Modo di calcolare la superficie di qualunque volta a cupola poligona. 407

Della solidità delle fescine.

Modo di calcolare la solidità di qualunque fescina acuta. 409
Modo di calcolare la solidità della Fescina sferica tronca. 413

Della superficie delle Fescine.

Modo di calcolare la superficie di qualunque Fescina acuta. 417
Modo di calcolare la superficie della Fescina sferica tronca. 419

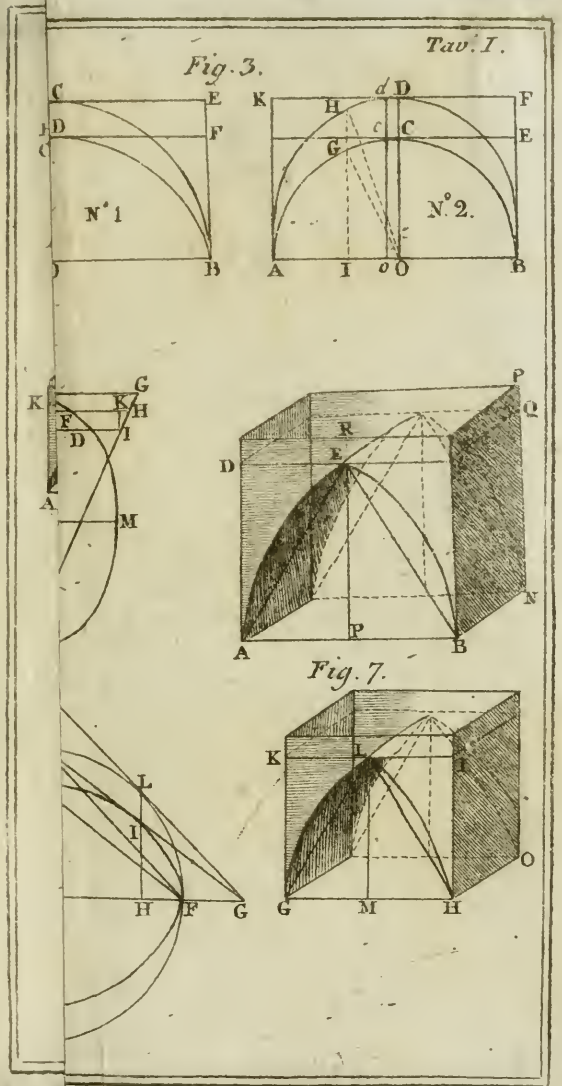

Tav. I.
Fig. 3.
N° 1
N° 2.
Fig. 7.

Fig. 1.

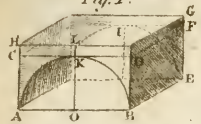


Fig. 2.

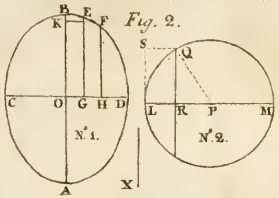


Fig. 3.

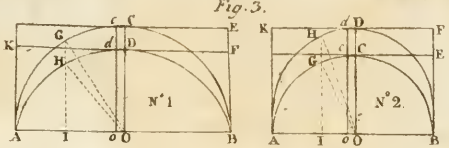


Fig. 4.

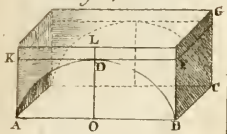


Fig. 5.

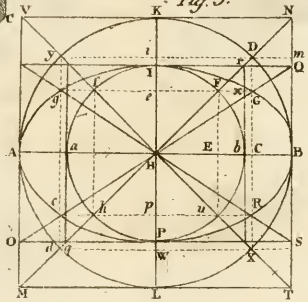
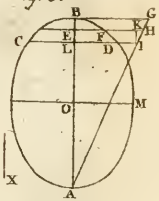


Fig. 6.



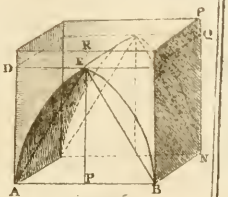


Fig. 7.

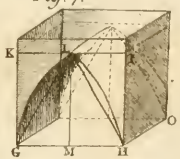


Fig. 8.

Fig. 9.

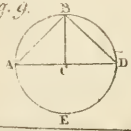


Fig. 10.

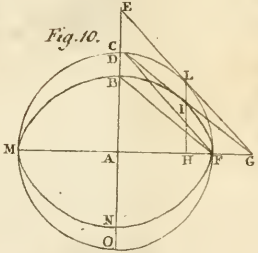
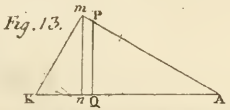


Fig. 13.



Tav. II.

Fig. 12.

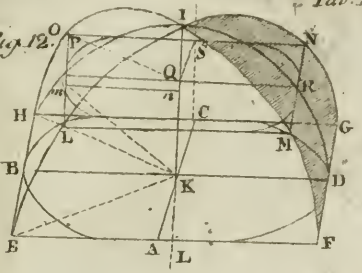
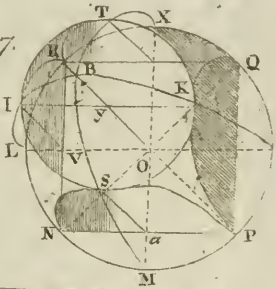
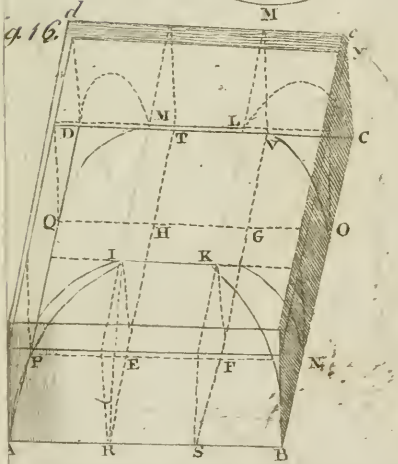


Fig. 17.

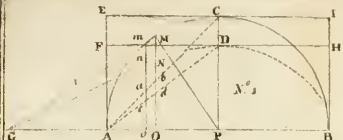


D

g. 16.



d'Angelo in


N.° 1

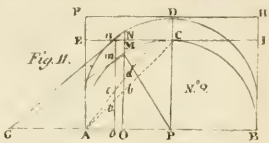


Fig. 11.
N.° 2

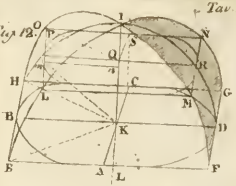


Fig. 12.

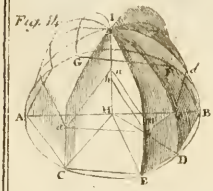
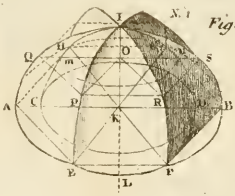


Fig. 13.


N.° 1

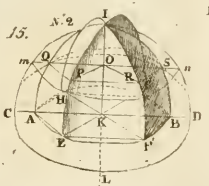


Fig. 15.
N.° 2

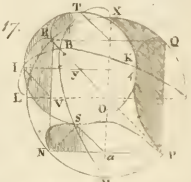


Fig. 17.

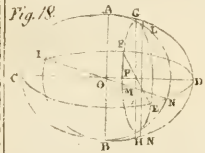


Fig. 18.

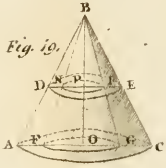


Fig. 19.

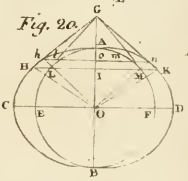


Fig. 20.

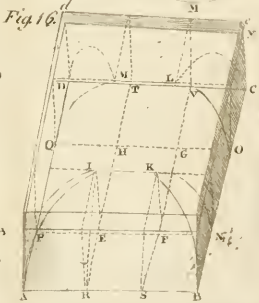


Fig. 16.
N.° 4.

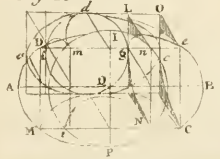


Fig 23.

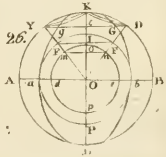


Fig. 26.

Fig. 27.

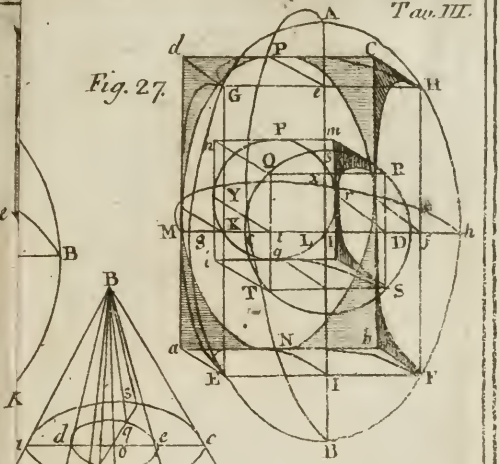
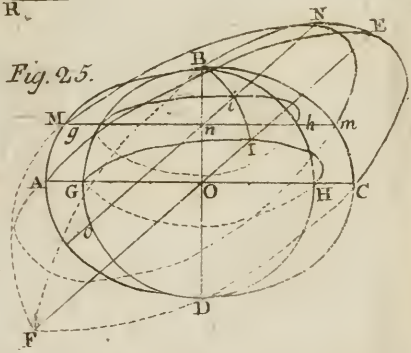


Fig. 25.



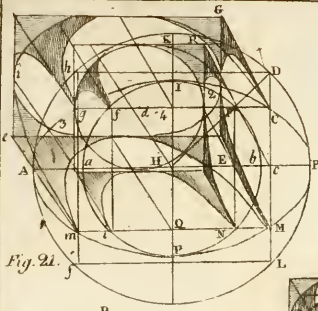


Fig. 21.

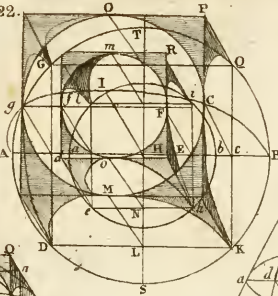


Fig. 22.

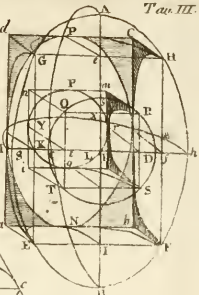


Fig. 27.

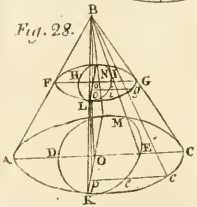


Fig. 28.

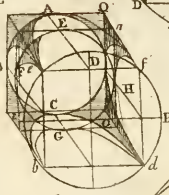


Fig. 24.

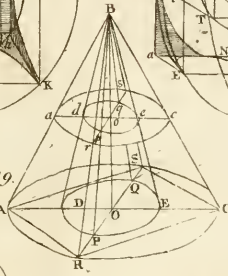


Fig. 29.

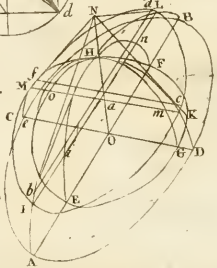


Fig. 31.

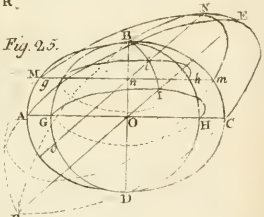


Fig. 25.

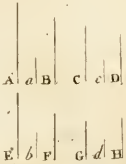
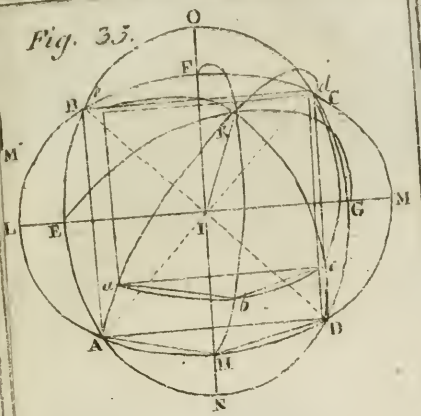


Fig. 30.

Fig. 33.



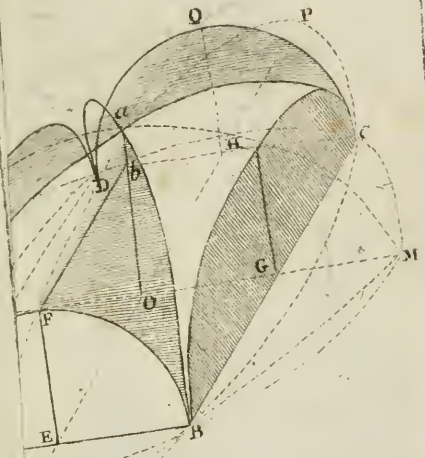


Fig. 32.

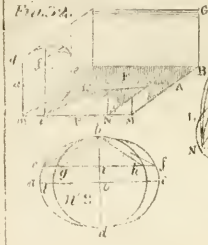


Fig. 33.

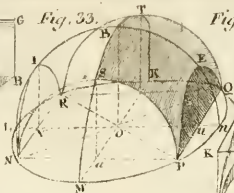


Fig. 34.

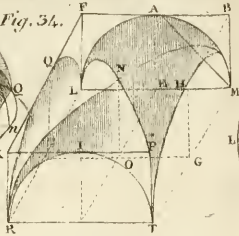


Fig. 35.

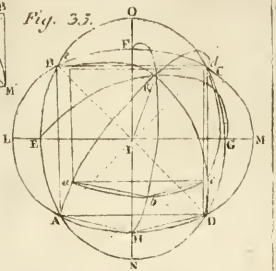


Fig. 36.

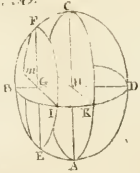


Fig. 37.

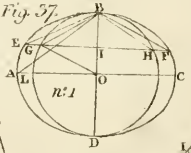


Fig. 38.

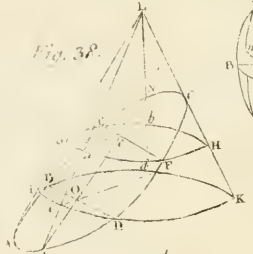


Fig. 39.

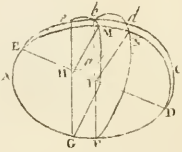


Fig. 40.

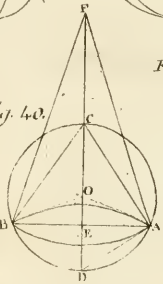


Fig. 41.

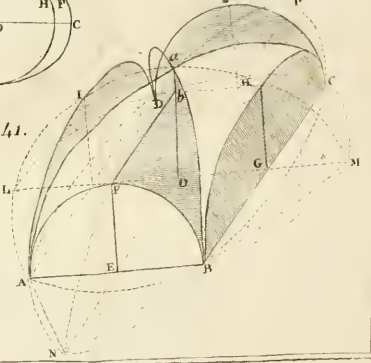
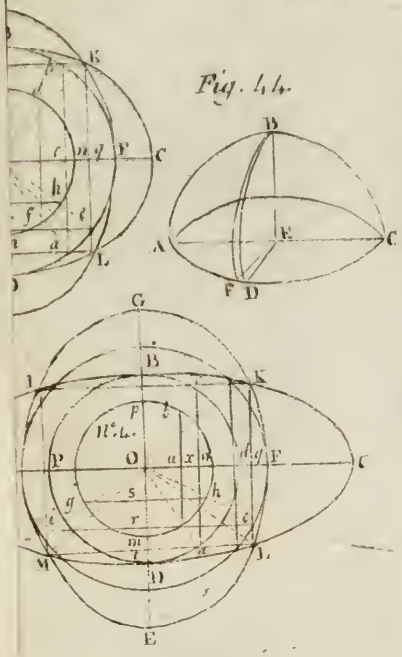
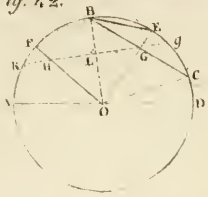


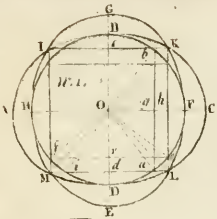
Fig. 44.


B
A
F
C
D
G
E
M
L
K
P
O
N°. 2.
N°. 1.
N°. 3.
N°. 4.
N°. 5.
N°. 6.
N°. 7.
N°. 8.
N°. 9.
N°. 10.
N°. 11.
N°. 12.
N°. 13.
N°. 14.
N°. 15.
N°. 16.
N°. 17.
N°. 18.
N°. 19.
N°. 20.
N°. 21.
N°. 22.
N°. 23.
N°. 24.
N°. 25.
N°. 26.
N°. 27.
N°. 28.
N°. 29.
N°. 30.
N°. 31.
N°. 32.
N°. 33.
N°. 34.
N°. 35.
N°. 36.
N°. 37.
N°. 38.
N°. 39.
N°. 40.
N°. 41.
N°. 42.
N°. 43.
N°. 44.
N°. 45.
N°. 46.
N°. 47.
N°. 48.
N°. 49.
N°. 50.
N°. 51.
N°. 52.
N°. 53.
N°. 54.
N°. 55.
N°. 56.
N°. 57.
N°. 58.
N°. 59.
N°. 60.
N°. 61.
N°. 62.
N°. 63.
N°. 64.
N°. 65.
N°. 66.
N°. 67.
N°. 68.
N°. 69.
N°. 70.
N°. 71.
N°. 72.
N°. 73.
N°. 74.
N°. 75.
N°. 76.
N°. 77.
N°. 78.
N°. 79.
N°. 80.
N°. 81.
N°. 82.
N°. 83.
N°. 84.
N°. 85.
N°. 86.
N°. 87.
N°. 88.
N°. 89.
N°. 90.
N°. 91.
N°. 92.
N°. 93.
N°. 94.
N°. 95.
N°. 96.
N°. 97.
N°. 98.
N°. 99.
N°. 100.
N°. 101.
N°. 102.
N°. 103.
N°. 104.
N°. 105.
N°. 106.
N°. 107.
N°. 108.
N°. 109.
N°. 110.
N°. 111.
N°. 112.
N°. 113.
N°. 114.
N°. 115.
N°. 116.
N°. 117.
N°. 118.
N°. 119.
N°. 120.
N°. 121.
N°. 122.
N°. 123.
N°. 124.
N°. 125.
N°. 126.
N°. 127.
N°. 128.
N°. 129.
N°. 130.
N°. 131.
N°. 132.
N°. 133.
N°. 134.
N°. 135.
N°. 136.
N°. 137.
N°. 138.
N°. 139.
N°. 140.
N°. 141.
N°. 142.
N°. 143.
N°. 144.
N°. 145.
N°. 146.
N°. 147.
N°. 148.
N°. 149.
N°. 150.
N°. 151.
N°. 152.
N°. 153.
N°. 154.
N°. 155.
N°. 156.
N°. 157.
N°. 158.
N°. 159.
N°. 160.
N°. 161.
N°. 162.
N°. 163.
N°. 164.
N°. 165.
N°. 166.
N°. 167.
N°. 168.
N°. 169.
N°. 170.
N°. 171.
N°. 172.
N°. 173.
N°. 174.
N°. 175.
N°. 176.
N°. 177.
N°. 178.
N°. 179.
N°. 180.
N°. 181.
N°. 182.
N°. 183.
N°. 184.
N°. 185.
N°. 186.
N°. 187.
N°. 188.
N°. 189.
N°. 190.
N°. 191.
N°. 192.
N°. 193.
N°. 194.
N°. 195.
N°. 196.
N°. 197.
N°. 198.
N°. 199.
N°. 200.
N°. 201.
N°. 202.
N°. 203.
N°. 204.
N°. 205.
N°. 206.
N°. 207.
N°. 208.
N°. 209.
N°. 210.
N°. 211.
N°. 212.
N°. 213.
N°. 214.
N°. 215.
N°. 216.
N°. 217.
N°. 218.
N°. 219.
N°. 220.
N°. 221.
N°. 222.
N°. 223.
N°. 224.
N°. 225.
N°. 226.
N°. 227.
N°. 228.
N°. 229.
N°. 230.
N°. 231.
N°. 232.
N°. 233.
N°. 234.
N°. 235.
N°. 236.
N°. 237.
N°. 238.
N°. 239.
N°. 240.
N°. 241.
N°. 242.
N°. 243.
N°. 244.
N°. 245.
N°. 246.
N°. 247.
N°. 248.
N°. 249.
N°. 250.
N°. 251.
N°. 252.
N°. 253.
N°. 254.
N°. 255.
N°. 256.
N°. 257.
N°. 258.
N°. 259.
N°. 260.
N°. 261.
N°. 262.
N°. 263.
N°. 264.
N°. 265.
N°. 266.
N°. 267.
N°. 268.
N°. 269.
N°. 270.
N°. 271.
N°. 272.
N°. 273.
N°. 274.
N°. 275.
N°. 276.
N°. 277.
N°. 278.
N°. 279.
N°. 280.
N°. 281.
N°. 282.
N°. 283.
N°. 284.
N°. 285.
N°. 286.
N°. 287.
N°. 288.
N°. 289.
N°. 290.
N°. 291.
N°. 292.
N°. 293.
N°. 294.
N°. 295.
N°. 296.
N°. 297.
N°. 298.
N°. 299.
N°. 300.
N°. 301.
N°. 302.
N°. 303.
N°. 304.
N°. 305.
N°. 306.
N°. 307.
N°. 308.
N°. 309.
N°. 310.
N°. 311.
N°. 312.
N°. 313.
N°. 314.
N°. 315.
N°. 316.
N°. 317.
N°. 318.
N°. 319.
N°. 320.
N°. 321.
N°. 322.
N°. 323.
N°. 324.
N°. 325.
N°. 326.
N°. 327.
N°. 328.
N°. 329.
N°. 330.
N°. 331.
N°. 332.
N°. 333.
N°. 334.
N°. 335.
N°. 336.
N°. 337.
N°. 338.
N°. 339.
N°. 340.
N°. 341.
N°. 342.
N°. 343.
N°. 344.
N°. 345.
N°. 346.
N°. 347.
N°. 348.
N°. 349.
N°. 350.
N°. 351.
N°. 352.
N°. 353.
N°. 354.
N°. 355.
N°. 356.
N°. 357.
N°. 358.
N°. 359.
N°. 360.
N°. 361.
N°. 362.
N°. 363.
N°. 364.
N°. 365.
N°. 366.
N°. 367.
N°. 368.
N°. 369.
N°. 370.
N°. 371.
N°. 372.
N°. 373.
N°. 374.
N°. 375.
N°. 376.
N°. 377.
N°. 378.
N°. 379.
N°. 380.
N°. 381.
N°. 382.
N°. 383.
N°. 384.
N°. 385.
N°. 386.
N°. 387.
N°. 388.
N°. 389.
N°. 390.
N°. 391.
N°. 392.
N°. 393.
N°. 394.
N°. 395.
N°. 396.
N°. 397.
N°. 398.
N°. 399.
N°. 400.
N°. 401.
N°. 402.
N°. 403.
N°. 404.
N°. 405.
N°. 406.
N°. 407.
N°. 408.
N°. 409.
N°. 410.
N°. 411.
N°. 412.
N°. 413.
N°. 414.
N°. 415.
N°. 416.
N°. 417.
N°. 418.
N°. 419.
N°. 420.
N°. 421.
N°. 422.
N°. 423.
N°. 424.
N°. 425.
N°. 426.
N°. 427.
N°. 428.
N°. 429.
N°. 430.
N°. 431.
N°. 432.
N°. 433.
N°. 434.
N°. 435.
N°. 436.
N°. 437.
N°. 438.
N°. 439.
N°. 440.
N°. 441.
N°. 442.
N°. 443.
N°. 444.
N°. 445.
N°. 446.
N°. 447.
N°. 448.
N°. 449.
N°. 450.
N°. 451.
N°. 452.
N°. 453.
N°. 454.
N°. 455.
N°. 456.
N°. 457.
N°. 458.
N°. 459.
N°. 460.
N°. 461.
N°. 462.
N°. 463.
N°. 464.
N°. 465.
N°. 466.
N°. 467.
N°. 468.
N°. 469.
N°. 470.
N°. 471.
N°. 472.
N°. 473.
N°. 474.
N°. 475.
N°. 476.
N°. 477.
N°. 478.
N°. 479.
N°. 480.
N°. 481.
N°. 482.
N°. 483.
N°. 484.
N°. 485.
N°. 486.
N°. 487.
N°. 488.
N°. 489.
N°. 490.
N°. 491.
N°. 492.
N°. 493.
N°. 494.
N°. 495.
N°. 496.
N°. 497.
N°. 498.
N°. 499.
N°. 500.
N°. 501.
N°. 502.
N°. 503.
N°. 504.
N°. 505.
N°. 506.
N°. 507.
N°. 508.
N°. 509.
N°. 510.
N°. 511.
N°. 512.
N°. 513.
N°. 514.
N°. 515.
N°. 516.
N°. 517.
N°. 518.
N°. 519.
N°. 520.
N°. 521.
N°. 522.
N°. 523.
N°. 524.
N°. 525.
N°. 526.
N°. 527.
N°. 528.
N°. 529.
N°. 530.
N°. 531.
N°. 532.
N°. 533.
N°. 534.
N°. 535.
N°. 536.
N°. 537.
N°. 538.
N°. 539.
N°. 540.
N°. 541.
N°. 542.
N°. 543.
N°. 544.
N°. 545.
N°. 546.
N°. 547.
N°. 548.
N°. 549.
N°. 550.
N°. 551.
N°. 552.
N°. 553.
N°. 554.
N°. 555.
N°. 556.
N°. 557.
N°. 558.
N°. 559.
N°. 560.
N°. 561.
N°. 562.
N°. 563.
N°. 564.
N°. 565.
N°. 566.
N°. 567.
N°. 568.
N°. 569.
N°. 570.
N°. 571.
N°. 572.
N°. 573.
N°. 574.
N°. 575.
N°. 576.
N°. 577.
N°. 578.
N°. 579.
N°. 580.
N°. 581.
N°. 582.
N°. 583.
N°. 584.
N°. 585.
N°. 586.
N°. 587.
N°. 588.
N°. 589.
N°. 590.
N°. 591.
N°. 592.
N°. 593.
N°. 594.
N°. 595.
N°. 596.
N°. 597.
N°. 598.
N°. 599.
N°. 600.
N°. 601.
N°. 602.
N°. 603.
N°. 604.
N°. 605.
N°. 606.
N°. 607.
N°. 608.
N°. 609.
N°. 610.
N°. 611.
N°. 612.
N°. 613.
N°. 614.
N°. 615.
N°. 616.
N°. 617.
N°. 618.
N°. 619.
N°. 620.
N°. 621.
N°. 622.
N°. 623.
N°. 624.
N°. 625.
N°. 626.
N°. 627.
N°. 628.
N°. 629.
N°. 630.
N°. 631.
N°. 632.
N°. 633.
N°. 634.
N°. 635.
N°. 636.
N°. 637.
N°. 638.
N°. 639.
N°. 640.
N°. 641.
N°. 642.
N°. 643.
N°. 644.
N°. 645.
N°. 646.
N°. 647.
N°. 648.
N°. 649.
N°. 650.
N°. 651.
N°. 652.
N°. 653.
N°. 654.
N°. 655.
N°. 656.
N°. 657.
N°. 658.
N°. 659.
N°. 660.
N°. 661.
N°. 662.
N°. 663.
N°. 664.
N°. 665.
N°. 666.
N°. 667.
N°. 668.
N°. 669.
N°. 670.
N°. 671.
N°. 672.
N°. 673.
N°. 674.
N°. 675.
N°. 676.
N°. 677.
N°. 678.
N°. 679.
N°. 680.
N°. 681.
N°. 682.
N°. 683.
N°. 684.
N°. 685.
N°. 686.
N°. 687.
N°. 688.
N°. 689.
N°. 690.
N°. 691.
N°. 692.
N°. 693.
N°. 694.
N°. 695.
N°. 696.
N°. 697.
N°. 698.
N°. 699.
N°. 700.
N°. 701.
N°. 702.
N°. 703.
N°. 704.
N°. 705.
N°. 706.
N°. 707.
N°. 708.
N°. 709.
N°. 710.
N°. 711.
N°. 712.
N°. 713.
N°. 714.
N°. 715.
N°. 716.
N°. 717.
N°. 718.
N°. 719.
N°. 720.
N°. 721.
N°. 722.
N°. 723.
N°. 724.
N°. 725.
N°. 726.
N°. 727.
N°. 728.
N°. 729.
N°. 730.
N°. 731.
N°. 732.
N°. 733.
N°. 734.
N°. 735.
N°. 736.
N°. 737.
N°. 738.
N°. 739.
N°. 740.
N°. 741.
N°. 742.
N°. 743.
N°. 744.
N°. 745.
N°. 746.
N°. 747.
N°. 748.
N°. 749.
N°. 750.
N°. 751.
N°. 752.
N°. 753.
N°. 754.
N°. 755.
N°. 756.
N°. 757.
N°. 758.
N°. 759.
N°. 760.
N°. 761.
N°. 762.
N°. 763.
N°. 764.
N°. 765.
N°. 766.
N°. 767.
N°. 768.
N°. 769.
N°. 770.
N°. 771.
N°. 772.
N°. 773.
N°. 774.
N°. 775.
N°. 776.
N°. 777.
N°. 778.
N°. 779.
N°. 780.
N°. 781.
N°. 782.
N°. 783.
N°. 784.
N°. 785.
N°. 786.
N°. 787.
N°. 788.
N°. 789.
N°. 790.
N°. 791.
N°. 792.
N°. 793.
N°. 794.
N°. 795.
N°. 796.
N°. 797.
N°. 798.
N°. 799.
N°. 800.
N°. 801.
N°. 802.
N°. 803.
N°. 804.
N°. 805.
N°. 806.
N°. 807.
N°. 808.
N°. 809.
N°. 810.
N°. 811.
N°. 812.
N°. 813.
N°. 814.
N°. 815.
N°. 816.
N°. 817.
N°. 818.
N°. 819.
N°. 820.
N°. 821.
N°. 822.
N°. 823.
N°. 824.
N°. 825.
N°. 826.
N°. 827.
N°. 828.
N°. 829.
N°. 830.
N°. 831.
N°. 832.
N°. 833.
N°. 834.
N°. 835.
N°. 836.
N°. 837.
N°. 838.
N°. 839.
N°. 840.
N°. 841.
N°. 842.
N°. 843.
N°. 844.
N°. 845.
N°. 846.
N°. 847.
N°. 848.
N°. 849.
N°. 850.
N°. 851.
N°. 852.
N°. 853.
N°. 854.
N°. 855.
N°. 856.
N°. 857.
N°. 858.
N°. 859.
N°. 860.
N°. 861.
N°. 862.
N°. 863.
N°. 864.
N°. 865.
N°. 866.
N°. 867.
N°. 868.
N°. 869.
N°. 870.
N°. 871.
N°. 872.
N°. 873.
N°. 874.
N°. 875.
N°. 876.
N°. 877.
N°. 878.
N°. 879.
N°. 880.
N°. 881.
N°. 882.
N°. 883.
N°. 884.
N°. 885.
N°. 886.
N°. 887.
N°. 888.
N°. 889.
N°. 890.
N°. 891.
N°. 892.
N°. 893.
N°. 894.
N°. 895.
N°. 896.
N°. 897.
N°. 898.
N°. 899.
N°. 900.
N°. 901.
N°. 902.
N°. 903.
N°. 904.
N°. 905.
N°. 906.
N°. 907.
N°. 908.
N°. 909.
N°. 910.
N°. 911.
N°. 912.
N°. 913.
N°. 914.
N°. 915.
N°. 916.
N°. 917.
N°. 918.
N°. 919.
N°. 920.
N°. 921.
N°. 922.
N°. 923.
N°. 924.
N°. 925.
N°. 926.
N°. 927.
N°. 928.
N°. 929.
N°. 930.
N°. 931.
N°. 932.
N°. 933.
N°. 934.
N°. 935.
N°. 936.
N°. 937.
N°. 938.
N°. 939.
N°. 940.
N°. 941.
N°. 942.
N°. 943.
N°. 944.
N°. 945.
N°. 946.
N°. 947.
N°. 948.
N°. 949.
N°. 950.
N°. 951.
N°. 952.
N°. 953.
N°. 954.
N°. 955.
N°. 956.
N°. 957.
N°. 958.
N°. 959.
N°. 960.
N°. 961.
N°. 962.
N°. 963.
N°. 964.
N°. 965.
N°. 966.
N°. 967.
N°. 968.
N°. 969.
N°. 970.
N°. 971.
N°. 972.
N°. 973.
N°. 974.
N°. 975.
N°. 976.
N°. 977.
N°. 978.
N°. 979.
N°. 980.
N°. 981.
N°. 982.
N°. 983.
N°. 984.
N°. 985.
N°. 986.
N°. 987.
N°. 988.
N°. 989.
N°. 990.
N°. 991.
N°. 992.
N°. 993.
N°. 994.
N°. 995.
N°. 996.
N°. 997.
N°. 998.
N°. 999.
N°. 1000.

8.

Fig. 42.





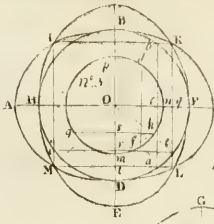


Fig. 44.

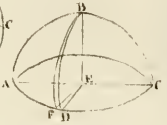


Fig. 45.

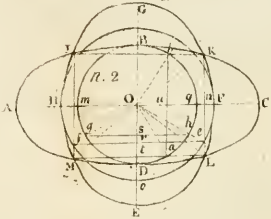


Fig 43

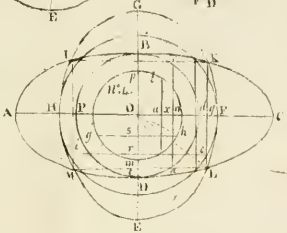


Fig. 47.

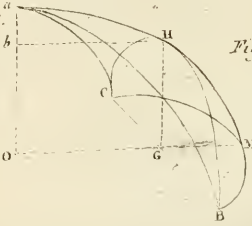


Fig. 48.

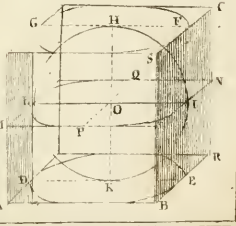


Fig. 46.

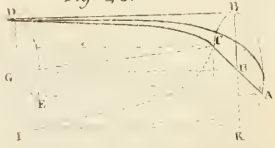


Fig. 50.

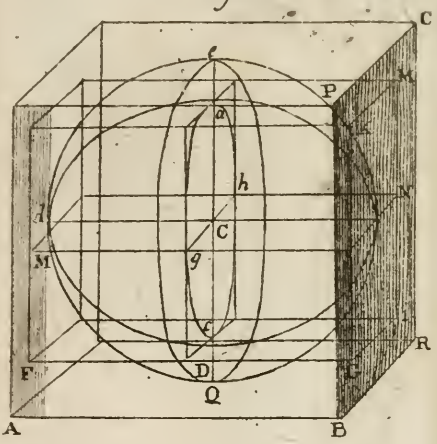


Fig. 53.

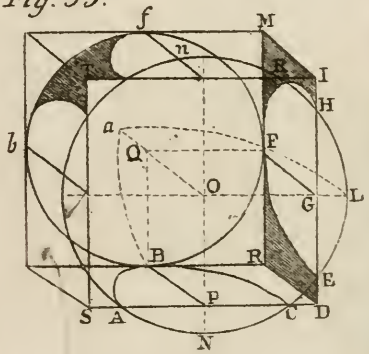


Fig. 49.

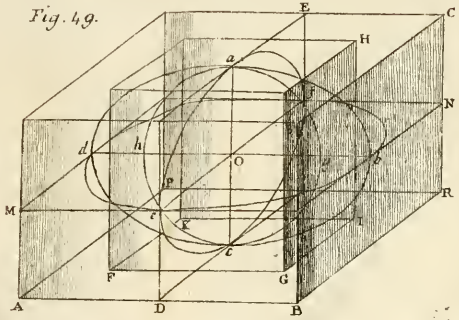


Fig. 50.

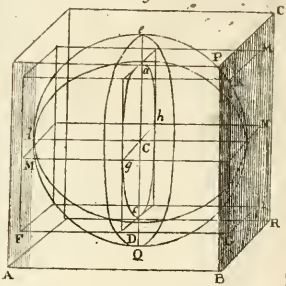


Fig. 51.

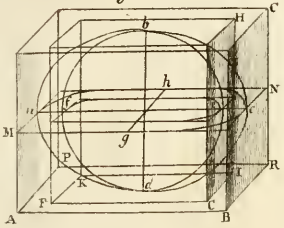


Fig. 52.

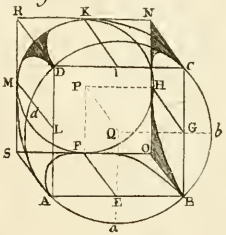
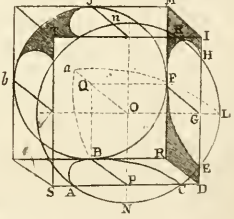


Fig. 53.



L1a

1C 89-B
6273